SEPARATUM
ACTA
ACADEMIAE PAEDAGOGICAE AGRIENSIS
NOVA SERIES TOM. XXI.

SECTIO MATEMATICAE

TÓMÁCS TIBOR

A REKURZÍV SOROZATOK EGY ALKALMAZÁSÁRÓL

EGER

1993

TÓMÁCS TIBOR

A REKURZÍV SOROZATOK EGY ALKALMAZÁSÁRÓL

ABSTRACT: *(On an application of second order linear recurrences)* Let $ax^2+bx-c=0$ be an equation such that a,b,c are positive integers and successive terms of an arithmetic sequence in any order. Let these numbers be of the form $n, n+r, n+2r$, where n and r positive integers. M. K. Mahanthappa [2] investigated the rational roots of the equation, provided that $r=1$ and n positive integer. In the paper we generalize this problem for the case $r>1$.

Legyen az $ax^2+bx-c=0$ másodfokú egyenletben a, b és c valamilyen sorrendben egy pozitív egészekből álló számtani sorozat egymást követő tagjai. Tekintsük ezeket $n, n+r, n+2r$, alakban, ahol n és r pozitív egészek.

M. K. Mahanthappa [2] azt a problémát vetette fel, hogy $r=1$ esetén, mely pozitív egész n-ekre lesznek racionális gyökei az egyenletnek. Ez egész együtthatók esetén akkor és csak akkor teljesül, ha az egyenlet diszkriminánsa négyzetszám. Rögzített n és r esetén a három együttható sorrendjétől függően hat különböző egyenletet kapunk, de csak három különböző diszkriminánst. Ezért elég a következő egyenleteket vizsgálni:

(1) $$nx^2+(n+2r)x-(n+r)=0\ ,$$

(2) $$(n+r)x^2+nx-(n+2r)=0\ ,$$

(3) $$nx^2+(n+r)x-(n+2r)=0\ .$$

Mahanthappa [2] $r=1$ esetén megadta az összes olyan n pozitív egészet, melyekre racionálisak a gyökök. Ezek az (1) egyenlet esetén $n=F_{2m}F_{2m+3}$, a (2) egyenlet esetén $n=F_{2m}F_{2m+1}-1$, és a (3) egyenlet esetén $n=F_{2m+1}-1$, ahol $m\geq 1$ egész, és F_k a Fibonacci sorozat k-adik tagja.

Most tekintsük az $r>1$ esetet. Ekkor egyszerű következményként kapjuk, hogy az (1) egyenletbe $n=rF_{2m}F_{2m+3}$, a (2) egyenletbe $n=rF_{2m}F_{2m+1}-r$, és a (3) egyenletbe $n=rF_{2m+1}-r$ helyettesítve, ahol $m\geq 1$ egész, racionálisak lesznek a gyökök. Nevezzük ezeket triviális választásoknak.

A dolgozat célja, hogy találjunk nem triviális pozitív egész n-eket, melyekre szintén racionálisak a gyökök.

A következő tételeket bizonyítjuk:

1. Tétel: Legyen az $r>1$ egész $r=u^2-uv-v^2$ alakú, ahol u és v pozitív valós számok. Legyen $\{R_k\}$ $(k=0,1,2,\ldots)$ egy másodrendű lineáris rekurzív sorozat, melyet az $R_0=v, R_1=u$ kezdőelemek és az $R_k=R_{k-1}+R_{k-2}$ rekurzió definiál, ahol $k>1$ egész. Legyen továbbá $N_m=R_{2m}R_{2m+3}$, ahol $m\geq 0$ egész.

Ha N_m egész és r nem osztója N_m-nek, akkor $n = N_m$ esetén (1) egyenletnek racionálisak a gyökei, és n nem triviális választás.

2. Tétel: Az előző tételben definiált r és R_k esetén legyen $T_m = R_{2m}R_{2m+1}$, ahol $m \geq 1$ egész.

Ha T_m egész és r nem osztója T_m-nek, akkor $n = n = T_m - r$ esetén (2) egyenletnek racionálisak a gyökei, és n nem triviális választás.

3. Tétel: Legyen az $r > 1$ egész és $r^2 = u^2 - uv - v^2$, ahol u és v pozitív egészek. Legyen $\{R_k\}(k = 0,1,2,\ldots)$ egy másodrendű lineáris rekurzív sorozat, melyet az $R_0 = v, R_1 = u$ kezdőelemek és az $R_k = R_{k-1} + R_{k-2}$ rekurzió definiál, ahol $k > 1$ egész.

Ha r nem osztója R_{2m+1}-nek, ahol $m \geq 0$ egész, akkor $n = R_{2m+1} - r$ esetén (3) egyenletnek racionálisak a gyökei, és n nem triviális választás.

A tételek bizonyításához szükségünk lesz a következő lemmákra:

1. Lemma: Legyen $\{R_m\}(m = 0,1,2,\ldots)$ egy másodrendű lineáris rekurzív sorozat, melyet az R_0, R_1 nem mindkettő zérus valós kezdőelemek, A, B konstans egészek és az $R_m = AR_{m-1} + BR_{m-2}$ rekurzió definiál, ahol $m > 1$ egész. Legyenek a sorozat $x^2 - Ax - B$ karakterisztikus polinomjának a gyökei

$$\alpha = \frac{A+\sqrt{A^2+4B}}{2} \text{ és } \beta = \frac{A-\sqrt{A^2+4B}}{2}.$$

Legyen továbbá $a = R_1 - R_0\beta$ és $b = R_1 - R_0\alpha$.

Tegyük fel, hogy a karakterisztikus polinom $D = A^2 + 4B$ diszkriminánsa nem nulla. Definiáljuk az $\{R_m\}$ sorozat $\{G_m\}$ asszociált sorozatát a

$$G_m = a\alpha^m + b\beta^m$$

formulával, ahol $m \geq 1$ egész. Ekkor

(4) $$R_m = \frac{a\alpha^m - b\beta^m}{\alpha - \beta} \qquad (m \geq 0),$$

(5) $$G_m = R_{m+1} + BR_{m-1} \qquad (m \geq 1),$$

és

(6) $$G_m^2 - DR_m^2 = 4(-B)^m(R_1^2 - AR_0R_1 - BR_0^2) \qquad (m \geq 1)$$

teljesül.

Megjegyzés: $A = B = 1$, $R_0 = 0$ és $R_1 = 1$ esetén az $\{R_m\}$ sorozat az ismert Fibonacci sorozatot szolgáltatja. Az $\{F_m\}$ Fibonacci sorozat asszociált sorozatát Lucas sorozatnak nevezzük és $\{L_m\}$-el jelöljük.

2. Lemma: Legyen az n pozitív egész olyan tulajdonságú, hogy az (1), (2), vagy (3) egyenlet gyökei racionálisak. Ekkor az n akkor és csak akkor triviális, ha r osztója n-nek.

1. Lemma bizonyítása: A (4) egyenlőség jól ismert, de teljes indukcióval is egyszerűen bizonyíthatjuk. (Lásd például D. Jarden [1].)

Az (5) egyenlőség az

$$a\alpha^m + b\beta^m = \frac{a\alpha^{m+1} - b\beta^{m+1}}{\alpha - \beta} - \alpha\beta\frac{a\alpha^{m-1} - b\beta^{m-1}}{\alpha - \beta}$$

és a $B = -\alpha\beta$ azonosságokból, továbbá a (4) egyenlőségből következik.

A (6) egyenlőséget $\alpha - \beta = \sqrt{D}$, $\alpha + \beta = A$ és $\alpha\beta = -B$ azonosságok segítségével, továbbá a (4) egyenlőséggel bizonyíthatjuk, hiszen

$$G_m^2 - DR_m^2 = \left(a\alpha^m + b\beta^m\right)^2 - D\left(\frac{a\alpha^m - b\beta^m}{\alpha - \beta}\right)^2 = 4ab\left(\alpha\beta\right)^m =$$

$$= 4(-B)^m(R_1 - R_0\beta)(R_1 - R_0\alpha) = 4(-B)^m\left(R_1^2 - AR_0R_1 - BR_0^2\right).$$

2. Lemma bizonyítása: Legyen az (1) egyenletnek racionálisak a gyökei. Ha r triviális választás, akkor $n = rF_{2m}F_{2m+3}$ $(m \geq 1)$, így r osztója n-nek. Ha $n = tr$, ahol $t \geq 1$ egész, akkor

$$trx^2 + (tr + 2r)x - (tr + r) = 0$$
$$tx^2 + (t + 2)x - (t + 1) = 0$$

aminek a feltétel miatt racionálisak a gyökei, így Mahanthappa említett eredményei alapján

$$t = F_{2m}F_{2m+3} \quad (m \geq 1)$$

és

$$n = rF_{2m}F_{2m+3} \quad (m \geq 1),$$

ami triviális választás. Hasonlóan bizonyíthatjuk az állítást a (2) és (3) egyenletekre is.

1. Tétel bizonyítása: Az (1) egyenlet diszkriminánsa

$$D_1 = (n+2r)^2 + 4n(n+r) = n^2 + (2(n+r))^2$$

Racionális gyökök esetén, és csak akkor D_1 négyzetszám, $D_1 = t^2$, ahol t egy pozitív egész. Ekkor $[n, 2(n+r), t]$ pitagoraszi számhármas.

Reprezentáljuk $[g^2 - h^2, 2gh, g^2 + h^2]$ alakban.

Ekkor $n = g^2 - h^2$ és $2(n+r) = 2gh$ miatt

(7) $$g^2 - gh - (h^2 - r) = 0$$

következik, ami g-re másodfokú egyenlet. Legyen a diszkriminánsa s^2.

Ekkor

$$s^2 = h^2 + 4(h^2 - r) = 5h^2 - 4r$$

illetve

(8) $$s^2 - 5h^2 = -4r \ .$$

A tételben szereplő $\{R_k\}$ sorozat esetén $A = B = 1$ és $D = A^2 + 4B = 5$, ezért (6) miatt

$$G_k^2 - 5R_k^2 = (-1)^k 4r$$

minden $k \geq 1$ egész esetén. $s = G_{2m+1}$ és $h = R_{2m+1}$ választással, ahol $m \geq 0$ egész, (8) teljesül és (7) alapján, (5) felhasználásával

$$g=\frac{h+s}{2}=\frac{R_{2m+1}+R_{2m+2}+R_{2m}}{2}=R_{2m+2}$$

mert $g>0$. Ekkor azonban

$$n=g^2-h^2=\left(R_{2m+2}\right)^2-\left(R_{2m+1}\right)^2=\left(R_{2m+2}-R_{2m+1}\right)\left(R_{2m+2}+R_{2m+1}\right)=$$
$$=R_{2m}R_{2m+3}=N_m \quad (m\geq 0)\ .$$

Ha N_m egész és r nem osztja N_m-et, akkor a 2. lemma miatt n nem triviális választás, és ezzel a tételt igazoltuk.

2. Tétel bizonyítása: A (2) egyenlet diszkriminánsa

$$D_2=n^2+4(n+r)(n+2r)=\left(2(n+r)\right)^2+(n+2r)^2\ .$$

Racionális gyökök esetén, és csak akkor D_2 négyzetszám, $D_2=t^2$, ahol t egy pozitív egész. Ezért $[2(n+r),n+2r,t]$ pitagoraszi számhármas. Reprezentáljuk $\left[2gh,g^2-h^2,g^2+h^2\right]$ alakban. Ebből hasonlóan az előzőhöz, azt kapjuk, hogy

$$n=R_{2m}R_{2m+1}-r=T_m-r \quad (m\geq 1)$$

esetén ha T_m egész és r nem osztója T_m-nek, akkor a (2) egyenletnek racionálisak a gyökei és n nem triviális választás.

Megjegyzés: Ha az 1. tétel bizonyításában $\left[2gh,g^2-h^2,g^2+h^2\right]$, illetve a 2. tétel bizonyításában $\left[g^2-h^2,2gh,g^2+h^2\right]$ reprezentációt tekintjük, nem kapunk újabb n-eket.

3. Tétel bizonyítása: A (3) egyenlet diszkriminánsa

$$D_3=(n+r)^2+4n(n+2r)=5(n+r)^2-4r^2\ .$$

Racionális gyökök esetén, és csak akkor D_3 négyzetszám, $D_3=t^2$, ahol t egy pozitív egész és

(9) $$t^2-5(n+r)^2=-4r^2 .$$

A tétel feltételei és (6) miatt

$$(G_{2m+1})^2-5(R_{2m+1})^2=-4r^2 \ (m\geq 0) .$$

Ezért $n=R_{2m+1}-r$ esetén, ha r nem osztója R_{2m+1}-nek, (3) gyökei racionálisak és n nem triviális választás.

Megjegyzés: A 3. tétel feltételei nem minden $r>1$ egész esetén teljesíthetők. Például $r=2$ esetén (9) miatt

$$t^2-5(n+2)^2=-16.$$

Ez csak páros n esetén állhat fenn, így racionális gyökök esetén n csak triviális választás lehet. Ennek következménye, hogy

$$x^2-5y^2=-16 .$$

összes egész megoldása

$$(x,y)=(\pm 2L_{2m+1},\pm 2F_{2m+1}),$$

illetve

$$x^2-5y^2=16$$

összes egész megoldása

$$(x,y)=(\pm 2L_{2m},\pm F_{2m})$$

ahol F_k, illetve L_k a k-adik Fibonacci, illetve Lucas szám és $m\geq 0$ egész.

Másrészt ha $r=11$, akkor $R_0=3$ és $R_1=13$, vagy $R_0=7$, és $R_1=17$ esetén teljesülnek a tétel feltételei.

Megjegyzés: A cikk leadása után (Fifth International Conference on Fibonacci Numbers and Their Applications, St. Andrews, 1992. július 22—24, konferencián elhangzott előadás nyomán) tudomásunkra jutott, hogy C. Long, G. L.

Cohen, T. Langtry és A. G. Shannon a jelen cikkben leírtakkal hasonló eredményekre jutottak.

IRODALOM

[1] D. Jarden, Recurring sequences, Riveon Lematematika, Jerusalem (Israel), 1958.

[2] M. K. Mahanthappa. Arithmetic sequences and Fibonacci quadratics. Fibonacci Quarterly 29 (1991), 343—346.