

*Separatum*

**ACTA  
ACADEMIAE PAEDAGOGICAE AGRIENSIS  
NOVA SERIES TOM. XXII.**

**SECTIO MATEMATICAE**

**TÓMÁCS TIBOR**

**Egy rekurzív sorozat tagjainak átlagáról**

**EGER, 1994**

# Egy rekurzív sorozat tagjainak átlagáról

TÓMÁCS TIBOR

**Abstract.** (Average order of the terms of a recursive sequence) For a fixed positive integer  $k \geq 2$  let the sequence  $G_k(n)$  of natural numbers be defined by  $G_k(0) = 0$  and  $G_k(n) = n - G_k(G_k(\dots(G_k(n-1))\dots))$ , ( $n \geq 1$ ) with  $k$  iterations of  $G_k$  on the right-hand side. Denote by  $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k$  the roots of the characteristic polynomial  $f(x) = x^k - x^{k-1} - 1$  of the generalized Fibonacci sequence  $b_n$ . It is known that these roots are distinct and that there is a positive root among them with the greatest modulus, thus we can suppose that  $\alpha > |\alpha_2| \geq |\alpha_3| \geq \dots \geq |\alpha_k| > 0$  (see e. g. [1]). In [2] P. Kiss proved that for any positive integer  $n$ , large enough, and  $k \geq 2$  we have  $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N G_k(i) = v_1 N + v_2 \alpha_2^n + v_3 \alpha_3^n + o(\alpha_2^n) + O(1)$ , where  $N = b_{n+1}$  and  $v_1, v_2, v_3$  are constants depending only on  $k$ . In this paper we generalize this result.

Legyen  $k \geq 2$  rögzített egész szám. Definiáljuk a természetes számok egy  $G_k(n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  sorozatát a  $G_k(0) = 0$  kezdő elemmel és a

$$G_k(n) = n - G_k(G_k(\dots(G_k(n-1))\dots))$$

rekurzív formulával  $n > 0$  esetre, ahol a jobb oldalon  $G_k$ -nak  $k$ -szoros iterációja van. Belátható, hogy a sorozat minden tagja jól definiált természetes szám (lásd Zay B. [4]).

Legyen

$$b_n = \begin{cases} n, & \text{ha } n = 1, 2, \dots, k, \\ b_{n-1} + b_{n-k}, & \text{ha } n > k \end{cases}$$

a Fibonacci sorozat  $k$ -adrendű általánosított sorozata. Egy  $m$  pozitív egész esetén tekintsük azt a legnagyobb  $i_1$  egész számot, melyre  $b_{i_1} \leq m$  teljesül. Legyen  $m_1 = m - b_{i_1}$ . Ha  $m_1 \neq 0$ , válasszuk a legnagyobb  $i_2$  egész számot, melyre  $b_{i_2} \leq m_1$ . Legyen  $m_2 = m_1 - b_{i_2}$ . Ha  $m_2 \neq 0$ , folytassuk az eljárást. Ez az algoritmus véges sok lépésben befejeződik. Így minden pozitív egész szám egyértelműen felírható  $b_n$  sorozatbeli elemek összegéként

$$(1) \quad m = \sum_{i=1}^j a_i b_i$$

alakban, ahol  $a_i = 1$  vagy  $0$ . Jelöljük ezt röviden

$$m = a_j a_{j-1} \dots a_1$$

módon. Definiáljuk a  $T_k(m)$  sorozatot  $T_k(0) = T_k(1) = 0$  kezdő értékkel és a

$$(2) \quad T_k(m) = a_j a_{j-1} \dots a_2 = \sum_{i=2}^j a_i b_{i-1} \quad (m > 1)$$

formulával, ahol az  $a_i$  számok  $m$ -nek (1)-ben definiált előállításában szereplő együtthatói.

A  $G_k(n)$  és  $T_k(n)$  sorozatok szoros kapcsolatban vannak egymással, D. S. Meek és G. H. J. Van Rees [3]-ban bizonyították, hogy

$$(3) \quad G_k(n) = T_k(n-1) + 1 \quad (n \geq 1).$$

Jelöljük  $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k$ -val a  $b_n$  sorozat karakterisztikus polinomjának — az  $x^k - x^{k-1} - 1$  polinomnak — a gyökeit. Ismert, hogy van a gyökök között egy legnagyobb abszolút értékű pozitív valós gyök, ezért feltehetjük, hogy

$$(4) \quad \alpha > |\alpha_2| \geq |\alpha_3| \geq \dots \geq |\alpha_k| > 0,$$

ahol  $\alpha > 1$  valós szám (lásd K. Dilcher [1]).

Kiss Péter [2]-ben a  $G_k(n)$  sorozat tagjainak átlagát vizsgálta, és bizonyította, hogy elég nagy  $n$  egészek esetén

$$(5) \quad \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N G_k(i) = v_1 N + v_2 \alpha_2^n + v_3 \alpha_3^n + o(\alpha_2^n) + O(1),$$

ahol  $N = b_{n+1}$  és a  $v_1, v_2, v_3$  csak  $k$ -tól függő valós konstansok.

Ezen dolgozat célja megmutatni, hogy nemcsak  $N = b_{n+1}$  alakú egészek esetén igaz az (5) formula.

A következő tételeket bizonyítjuk:

**1. Tétel.** Legyenek  $k \geq 2$  és  $t$  rögzített pozitív egészek. Ekkor elég nagy pozitív  $n$  egészek esetén

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N G_k(i) = \left( v_1 N + v_2 \alpha_2^n + v_3 \alpha_3^n + O(1) + o(\alpha_2^n) \right) \frac{1}{1 + o(1)},$$

ahol  $N = b_{n+1} + t$  és a  $v_1, v_2, v_3$  csak  $k$ -től függő konstansok.

**2. Tétel.** Legyenek  $k \geq 2$  és  $t \geq k$  rögzített egészek. Ekkor elég nagy pozitív  $n$  egészek esetén

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N G_k(i) = \left( v'_1 N + v'_2 \alpha_2^n + v'_3 \alpha_3^n + O(1) + o(\alpha_2^n) \right) \frac{1}{1 + o(1)},$$

ahol  $N = b_{n+1} + b_{n-t+1}$ , és a  $v'_1, v'_2, v'_3$  csak  $k$ -től és  $t$ -től függő konstansok.

**Megjegyzés.** Az 1. tételben a  $v_1, v_2, v_3$  konstansok megegyeznek az (5)-ben található konstansokkal.

1. TÉTEL BIZONYÍTÁSA. Vizsgáljuk a  $\sum_{i=1}^N G_k(i)$  összeget. Bontsuk fel két tagra az alábbi módon.

$$(6) \quad \sum_{i=1}^N G_k(i) = \sum_{i=1}^{b_{n+1}} G_k(i) + \sum_{i=b_{n+1}+1}^N G_k(i)$$

Az első összeg [2] szerint

$$(7) \quad \sum_{i=1}^{b_{n+1}} G_k(i) = r_1 \alpha^{2n} + r_2 \alpha^n \alpha_3^n + r_3 \alpha^n \alpha_3^n + r_4 \alpha_2^{2n} + \\ + r_5 \alpha_3^{2n} + r_6 \alpha_2^n \alpha_3^n + O(\alpha^n) + O(\alpha^n \alpha_4^n)$$

alakban írható fel, ahol  $r_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ )  $k$ -től függő konstansok. (3)-ból

$$\sum_{i=b_{n+1}+1}^N G_k(i) = T_k(b_{n+1}) + 1 + T_k(b_{n+1} + 1) + 1 + \cdots + T_k(N - 1) + 1 = \\ = N - b_{n+1} + \sum_{i=b_{n+1}}^{N-1} T_k(i) = t + \sum_{i=b_{n+1}}^{b_{n+1}+t-1} T_k(i)$$

következik. Elég nagy  $n$  esetén teljesül, hogy  $t < b_{n-k+2}$ , ezért  $N < b_{n+2}$ . Így  $T_k(i)$  definíciója miatt minden  $b_{n+1} \leq i \leq b_{n+1} + t - 1$  egész esetén  $T_k(i) = b_n + T_k(i - b_{n+1})$ . Ebből következik, hogy

$$\sum_{i=b_{n+1}+1}^N G_k(i) = t + t b_n + \sum_{i=0}^{t-1} T_k(i).$$

Ebben az összegben az  $n$ -től független tagok összegét jelöljük  $f_{k,t}$ -vel. Tehát

$$f_{k,t} := t + \sum_{i=0}^{t-1} T_k(i).$$

Ismert, hogy a  $b_n$  sorozat tagjai felírhatók

$$(8) \quad b_n = c_1 \alpha^n + c_2 \alpha_2^n + \cdots + c_k \alpha_k^n$$

alakban, ahol  $c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) csak  $k$ -től függő komplex konstansok (K. Dilcher [1]).

Ezért

$$\sum_{i=b_{n+1}+1}^N G_k(i) = f_{k,t} + t(c_1 \alpha^n + c_2 \alpha_2^n + \cdots + c_k \alpha_k^n).$$

Az  $\alpha > 1$  valós szám, másrészt (4) miatt

$$f_{k,t} + t(c_1 \alpha^n + c_2 \alpha_2^n + \cdots + c_k \alpha_k^n) \leq f_{k,t} \alpha^n + t c_1 \alpha^n + t c_2 \alpha_2^n + \cdots + t c_k \alpha_k^n \leq (f_{k,t} + t c_1 + t c_2 + \cdots + t c_k) \alpha^n.$$

Ebből következik, hogy

$$(9) \quad \sum_{i=b_{n+1}+1}^N G_k(i) = O(\alpha^n).$$

(6), (7) és (9)-ből adódik, hogy

$$(10) \quad \sum_{i=1}^N G_k(i) = r_1 \alpha^{2n} + r_2 \alpha^n \alpha_2^n + r_3 \alpha^n \alpha_3^n + r_4 \alpha_2^{2n} + r_5 \alpha_3^{2n} + r_6 \alpha_2^n \alpha_3^n + O(\alpha^n) + O(\alpha^n \alpha_4^n),$$

továbbá (8)-ből

$$(11) \quad N = b_{n+1} + t = s_1 \alpha^n + s_2 \alpha_2^n + \cdots + s_k \alpha_k^n + t = s_1 \alpha^n + O(\alpha_2^n) + t,$$

ahol  $s_i = c_i \alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ). Felhasználva (11)-et

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N G_k(i) = \frac{\sum_{i=1}^N G_k(i)}{s_1 \alpha^n + O(\alpha_2^n) + t} = \frac{\sum_{i=1}^N G_k(i)}{s_1 \alpha^n \left(1 + \frac{O(\alpha_2^n) + t}{s_1 \alpha^n}\right)} + \frac{\sum_{i=1}^N G_k(i)}{s_1 \alpha^n (1 + o(1))}$$

adódik, amiből (10) alapján kapjuk az

$$(12) \quad \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N G_k(i) = \left( p_1 \alpha^n + p_2 \alpha_2^n + p_3 \alpha_3^n + p_4 \left( \frac{\alpha_2}{\alpha} \right)^n \alpha_2^n + p_5 \left( \frac{\alpha_3}{\alpha} \right)^n \alpha_3^n + \right. \\ \left. + p_6 \left( \frac{\alpha_2 \alpha_3}{\alpha} \right)^n + O(\alpha_4^n) + O(1) \right) \frac{1}{1 + o(1)}$$

becslést, ahol  $p_i = \frac{r_i}{s_1}$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ). De

$$p_1 \alpha^n = (s_1 \alpha^n + s_2 \alpha_2^n + \dots + s_k \alpha_k^n + t) \frac{p_1}{s_1} - \frac{p_1}{s_1} s_2 \alpha_2^n - \\ - \frac{p_1}{s_1} s_3 \alpha_3^n - \dots - \frac{p_1}{s_1} s_k \alpha_k^n - \frac{p_1}{s_1} t.$$

Mivel  $s_1 \alpha^n + s_2 \alpha_2^n + \dots + s_k \alpha_k^n + t = N$ , továbbá (4) miatt

$$-\frac{p_1}{s_1} s_4 \alpha_4^n - \frac{p_1}{s_1} s_5 \alpha_5^n - \dots - \frac{p_1}{s_1} s_k \alpha_k^n = O(\alpha_4^n),$$

és

$$-\frac{p_1}{s_1} t = O(1),$$

így  $v_1 := \frac{p_1}{s_1}$ ,  $d_2 := -\frac{p_1}{s_1} s_2$ ,  $d_3 := -\frac{p_1}{s_1} s_3$  jelöléssel

$$(13) \quad p_1 \alpha^n = v_1 N + d_2 \alpha_2^n + d_3 \alpha_3^n + O(\alpha_4^n) + O(1)$$

adódik. Tudjuk még, hogy

$$(14) \quad p_4 \left( \frac{\alpha_2}{\alpha} \right)^n \alpha_2^n + p_5 \left( \frac{\alpha_3}{\alpha} \right)^n \alpha_3^n + p_6 \left( \frac{\alpha_2 \alpha_3}{\alpha} \right)^n + O(\alpha_4^n) = o(\alpha_2^n).$$

Ezért (12), (13) és (14) alapján

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N G_k(i) = \left( v_1 N + v_2 \alpha_2^n + v_3 \alpha_3^n + O(1) + o(\alpha_2^n) \right) \frac{1}{1 + o(1)},$$

ami a tételünket bizonyítja. A bizonyítás során a konstansok értékét nem befolyásolta  $t$ , így valóban igaz a megjegyzés állítása is.

2. TÉTEL BIZONYÍTÁSA. (1), (2), (3) és (7) alapján

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N G_k(i) &= \sum_{i=1}^{b_{n+1}-1} T_k(i) + N + b_{n-t+1}b_n + \sum_{i=1}^{b_{n-t+1}-1} T_k(i) = \\ &= x_1\alpha^{2n} + x_2\alpha^n\alpha_2^n + x_3\alpha^n\alpha_3^n + x_4\alpha_2^{2n} + x_5\alpha_3^{2n} + \\ &+ x_6\alpha_2^n\alpha_3^n + O(\alpha^n) + O(\alpha^n\alpha_4^n) + N + b_nb_{n-t+1}, \end{aligned}$$

ahol

$$\begin{aligned} x_i &= r_i \left( 1 + \frac{1}{\alpha^t \alpha_i^t} \right) \quad (i = 1, 2, 3), \quad x_4 = r_4 \left( 1 + \frac{1}{\alpha_2^{2t}} \right), \\ x_5 &= r_5 \left( 1 + \frac{1}{\alpha_3^{2t}} \right) \quad \text{és} \quad x_6 = r_6 \left( 1 + \frac{1}{\alpha_2^t \alpha_3^t} \right). \end{aligned}$$

A továbbiakban

$$\begin{aligned} b_nb_{n-t+1} &= (c_1\alpha^n + c_2\alpha_2^n + \dots + c_k\alpha_k^n) \left( \frac{s_1}{\alpha^t}\alpha^n + \frac{s_2}{\alpha_2^t}\alpha_2^n + \dots + \frac{s_k}{\alpha_k^t}\alpha_k^n \right) = \\ &= z_1\alpha^{2n} + z_2\alpha^n\alpha_2^n + z_3\alpha^n\alpha_3^n + z_4\alpha_2^{2n} + z_5\alpha_3^{2n} + z_6\alpha_2^n\alpha_3^n + O(\alpha^n\alpha_4^n) \end{aligned}$$

felhasználásával, ahol

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{s_1^2}{\alpha^{t+1}}, \quad z_2 = \frac{s_1s_2}{\alpha\alpha_2^t} + \frac{s_1s_2}{\alpha^t\alpha_2}, \quad z_3 = \frac{s_1s_3}{\alpha\alpha_3^t} + \frac{s_1s_3}{\alpha^t\alpha_3}, \\ z_4 &= \frac{s_2^2}{\alpha_2^{t+1}}, \quad z_5 = \frac{s_3^2}{\alpha_3^{t+1}}, \quad z_6 = \frac{s_2s_3}{\alpha_2\alpha_3^t} + \frac{s_2s_3}{\alpha_2^t\alpha_3}, \end{aligned}$$

a tétel hasonlóan bizonyítható, mint az előző.

**Megjegyzés.** Kiszámolva  $v_1$  és  $v'_1$  konstansokat

$$v'_1 = \frac{r_1 \left( 1 + \frac{1}{\alpha^{2t}} \right) + \frac{s_1^2}{\alpha^{t+1}}}{s_1^2 \left( 1 + \frac{1}{\alpha^t} \right)^2},$$

továbbá

$$v_1 = \frac{c_1\alpha^{1-4k}}{\alpha-1} + \alpha^{-4k} \left( \sum_{q=2}^k \frac{c_q\alpha_q^2}{\alpha^2 - \alpha_q} \right) + \alpha^{-4k} \frac{\alpha^{2k} - 1}{\alpha^2 - 1} + \frac{1}{2\alpha^2}$$

adódik. Belátható behelyettesítéssel, hogy  $k = 2$  és  $k = 3$  esetén  $v_1 = v'_1$ . A sejtés az, hogy ez minden  $k \geq 2$  esetén teljesül, vagyis a 2. tételben definiált  $N$ -re is igaz az (5) formula.

Az 1. tétel bizonyításából látható, hogy  $v_1 = \frac{r_1}{c_1^2 \alpha^2}$ . Ezért  $v_1 = v'_1$  akkor és csak akkor teljesül, ha  $c_1^2 \alpha = 2r_1$ . Visszaírva  $r_1$ -et  $v_1$ -be kapjuk, hogy a sejtés ekvivalens a  $v_1 = \frac{1}{2\alpha}$  állítással.

### Irodalom

- [1] K. DILCHER, On a class of iterative recurrence relations, *Fibonacci Quart.*, (to appear).
- [2] P. KISS, Avarage order of the terms of a recursive sequence, *Proc. of the Austrian-Hungarian-Slovak. Number Theory Coll.*, Graz, (1992), (to appear).
- [3] D. S. MEEK and G. H. J. VAN REES, The solution of an iterated recurrence, *Fibonacci Quart.*, **22** (1984), 101–104.
- [4] ZAY B.: Egy rekurzív sorozatról. *Acta Academiae Paedagogicae Agriensis, Sectio Mat.*, (megjelenés alatt).