Eszterházy Károly Főiskola
Matematikai és Informatikai Intézet

Tómács Tibor

Matematikai statisztika gyakorlatok összefoglaló

Eger, 2012

Tartalomjegyzék

Jelölések **2**

1. Összefoglaló **4**

1.1. Eloszlások generálása 4

1.1.1. Egyenletes eloszlásból származtatott eloszlások 4

1.1.2. Normális eloszlásból származtatott eloszlások 5

1.2. Grafikus illeszkedésvizsgálat 5

1.3. Intervallumbecslések 6

1.4. Paraméteres hipotézisvizsgálatok 7

1.5. Nemparaméteres hipotézisvizsgálatok 10

1.6. Regressziószámítás 13

1.7. Excel függvények 16

1.7.1. Logikai függvények 17

1.7.2. Elemi függvények 17

1.7.3. Mátrixok 18

1.7.4. Kombinatorika 18

1.7.5. Pszeudo-véletlen szám generálása 18

1.7.6. Statisztikák 18

1.7.7. Eloszlások 20

1.7.8. Eloszlásfüggvények 20

1.7.9. Sűrűségfüggvények 21

1.7.10. Inverz eloszlásfüggvények 21

1.7.11. Grafikus illeszkedésvizsgálat 22

1.7.12. Intervallumbecslés 22

1.7.13. Paraméteres hipotézisvizsgálatok 22

1.7.14. Nemparaméteres hipotézisvizsgálatok 23

1.7.15. Regressziószámítás 23

Jelölések

Általános

$\mathbb{N}$	a pozitív egész számok halmaza
$\mathbb{R}$	a valós számok halmaza
$\mathbb{R}^n$	$\mathbb{R}$-nek önmagával vett n-szeres Descartes-szorzata
$\mathbb{R}_+$	a pozitív valós számok halmaza
(a, b)	rendezett elempár vagy nyílt intervallum
$\simeq$	közelítőleg egyenlő
$[x]$	az x valós szám egész része
f^{-1}	az f függvény inverze
$A^\top$	az A mátrix transzponáltja
A^{-1}	az A mátrix inverze

Valószínűségszámítás

$\mathrm{P}(A)$	az A esemény valószínűsége
$\mathrm{E}\,\xi$	ξ várható értéke
$\mathrm{D}\,\xi,\ \mathrm{D}^2\,\xi$	ξ szórása illetve szórásnégyzete
$\mathrm{cov}(\xi, \eta)$	kovariancia
$\mathrm{corr}(\xi, \eta)$	korrelációs együttható
φ	a standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye
Φ	a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye
I_A	az A esemény indikátorváltozója
$\mathbf{Bin}(r; p)$	az r-edrendű p paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változók halmaza
$\mathbf{Exp}(\lambda)$	a λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók halmaza
$\mathbf{Norm}(m; \sigma)$	az m várható értékű és σ szórású normális eloszlású valószínűségi változók halmaza
$\mathbf{Norm}_d(m; A)$	az m és A paraméterű d-dimenziós normális eloszlású valószínűségi változók halmaza
$\mathbf{Gamma}(r; \lambda)$	az r-edrendű λ paraméterű gamma-eloszlású valószínűségi változók halmaza
$\mathbf{Khi}(s)$	az s szabadsági fokú khi-négyzet eloszlású valószínűségi változók halmaza

$\mathbf{t}(s)$	az s szabadsági fokú t-eloszlású valószínűségi változók halmaza
$\mathbf{F}(s_1; s_2)$	az s_1 és s_2 szabadsági fokú F-eloszlású valószínűségi változók halmaza
$F \sim \mathbf{V}$	Ha ξ valószínűségi változó, és $\mathbf{V}$ a ξ-vel azonos eloszlású valószínűségi változók halmaza, akkor ez azt jelöli, hogy F a $\mathbf{V}$-beli valószínűségi változók közös eloszlásfüggvénye. Például $\Phi \sim \mathbf{Norm}(0; 1)$.

Matematikai statisztika

F_n^*	tapasztalati eloszlásfüggvény
$\overline{\xi}$	a ξ-re vonatkozó minta átlaga (mintaátlag)
$S_n,\ S_n^2$	tapasztalati szórás illetve szórásnégyzet
$S_{\xi,n},\ S_{\xi,n}^2$	ξ-re vonatkozó tapasztalati szórás illetve szórásnégyzet
$S_n^*,\ S_n^{*2}$	korrigált tapasztalati szórás illetve szórásnégyzet
$S_{\xi,n}^*,\ S_{\xi,n}^{*2}$	ξ-re vonatkozó korrigált tapasztalati szórás illetve szórásnégyzet
$\xi_1^*, \ldots, \xi_n^*$	rendezett minta
$\mathrm{Cov}_n(\xi, \eta)$	tapasztalati kovariancia
$\mathrm{Corr}_n(\xi, \eta)$	tapasztalati korrelációs együttható
$\widehat{\vartheta}$	a ϑ paraméter becslése
$H_0,\ H_1$	nullhipotézis, ellenhipotézis

1. Összefoglaló

1.1. Eloszlások generálása

1.1.1. Egyenletes eloszlásból származtatott eloszlások

Itt az $\eta, \eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots$ független, a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változókat jelent.

- **Diszkrét egyenletes eloszlás**
  Ha $m \in \mathbb{N}$, akkor $[m\eta]+1$ diszkrét egyenletes eloszlású az $\{1, \ldots, m\}$ halmazon.

- **Karakterisztikus eloszlás**
  Ha $0 < p < 1$, akkor $\mathrm{I}_{\eta<p}$ karakterisztikus eloszlású p paraméterrel.

- **Binomiális eloszlás**
  Ha $r \in \mathbb{N}$ és $0 < p < 1$, akkor $\sum_{i=1}^{r} \mathrm{I}_{\eta_i<p}$ r-edrendű p paraméterű binomiális eloszlású.

- **Hipergeometrikus eloszlás**
  Legyen $r, M, N \in \mathbb{N}$, $M < N$, továbbá $r \leqslant \min\{M, N-M\}$. Ekkor

$$\xi_0 \equiv 0, \quad \xi_i := \begin{cases} \xi_{i-1}+1, & \text{ha } \eta_i < \frac{M-\xi_{i-1}}{N-i+1}, \\ \xi_{i-1}, & \text{különben}, \end{cases} \quad (i = 1, \ldots, r)$$

  jelöléssel

$$\mathrm{P}(\xi_r = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{r-k}}{\binom{N}{r}} \quad (k = 0, \ldots, r),$$

  azaz ξ_r hipergeometrikus eloszlású N, M, r paraméterekkel.

- **Poisson-eloszlás**
  Ha $\lambda > 0$, akkor

$$\min\left\{ s : \prod_{i=0}^{s} \eta_i < e^{-\lambda} \right\}$$

  Poisson-eloszlású λ paraméterrel.

- **Geometriai eloszlás**
  Ha $0 < p < 1$, akkor $\min\{s : \eta_s < p\}$ geometriai eloszlású p paraméterrel.

- **Folytonos egyenletes eloszlás**
  Ha $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, akkor $a + (b - a)\eta$ az $[a, b]$ intervallumon egyenletes eloszlású.

- **Exponenciális eloszlás**
  Ha $\lambda > 0$, akkor $-\frac{\ln \eta}{\lambda}$ exponenciális eloszlású λ paraméterrel.

- **Gamma-eloszlás**
  Ha $\lambda > 0$ és $r \in \mathbb{N}$, akkor $-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{r} \ln \eta_i$ r-edrendű λ paraméterű gamma-eloszlású.

- **Normális eloszlás**
  Ha $m \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$, akkor

  $$m + \sigma\sqrt{-2\ln \eta_1}\cos(2\pi\eta_2)$$

  normális eloszlású m várható értékkel és σ szórással.

1.1.2. Normális eloszlásból származtatott eloszlások

Itt az η, η_i $(i \in \mathbb{N})$ független standard normális eloszlású valószínűségi változókat jelent.

- **Khi-négyzet eloszlás**
  Ha $s \in \mathbb{N}$, akkor $\sum_{i=1}^{s} \eta_i^2$ khi-négyzet eloszlású s szabadsági fokkal.

- **t-eloszlás**
  Ha $s \in \mathbb{N}$, akkor $\eta\sqrt{\frac{s}{\sum_{i=1}^{s}\eta_i^2}}$ t-eloszlású s szabadsági fokkal.

- **Cauchy-eloszlás**
  $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ Cauchy-eloszlású.

- **F-eloszlás**
  Ha $s_1, s_2 \in \mathbb{N}$, akkor $\frac{s_2\sum_{i=1}^{s_1}\eta_i^2}{s_1\sum_{i=s_1+1}^{s_1+s_2}\eta_i^2}$ F-eloszlású s_1 és s_2 szabadsági fokkal.

1.2. Grafikus illeszkedésvizsgálat

Legyen $x_1, \ldots, x_r \in \mathbb{R}$ és $x_1 < x_2 < \cdots < x_r$. Jelölje n a mintarealizáció elemeinek a számát és k_i az x_i-nél kisebb elemek számát a mintarealizációban.

- **Normalitásvizsgálat**
  Ha teljesül, hogy a vizsgált valószínűségi változó normális eloszlású m várható értékkel és σ szórással, akkor $\boxed{y_i := \Phi^{-1}\left(\frac{k_i}{n}\right)}$ jelöléssel az (x_i, y_i) $(i = 1, \ldots, r)$ koordinátájú pontok körülbelül egy olyan egyenesre esnek, melynek $\frac{1}{\sigma}$ a meredeksége és $-\frac{m}{\sigma}$ értéknél metszi a függőleges tengelyt.

- **Exponencialitásvizsgálat**
  Ha teljesül, hogy a vizsgált valószínűségi változó exponenciális eloszlású λ paraméterrel, akkor $\boxed{y_i := \ln\left(1 - \frac{k_i}{n}\right)}$ jelöléssel az (x_i, y_i) $(i = 1, \ldots, r)$ koordinátájú pontok körülbelül egy olyan egyenesre esnek, melynek $-\lambda$ a meredeksége és átmegy az origón.

1.3. Intervallumbecslések

Legyen a ξ valószínűségi változóra vonatkozó minta $\xi_1, \ldots, \xi_n$, és $1-\alpha$ a becsülendő paraméterre vonatkozó $[\tau_1, \tau_2]$ konfidenciaintervallum biztonsági szintje.

- $\xi \in \mathbf{Norm}(m; \sigma)$
  m az ismeretlen becsülendő paraméter, σ ismert
  $\tau_1 = \overline{\xi} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$
  $\tau_2 = \overline{\xi} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$

- $\xi \in \mathbf{Norm}(m; \sigma)$
  m ismert, σ az ismeretlen becsülendő paraméter
  $F \sim \mathbf{Khi}(n)$
  $\tau_1 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - m)^2}{F^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}}$
  $\tau_2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - m)^2}{F^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}$

- $\xi \in \mathbf{Norm}(m; \sigma)$
  m ismeretlen, σ az ismeretlen becsülendő paraméter
  $n \geqslant 2,\ F \sim \mathbf{Khi}(n-1)$
  $\tau_1 = S_n\sqrt{\frac{n}{F^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}}$
  $\tau_2 = S_n\sqrt{\frac{n}{F^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}$

- $\xi \in \mathbf{Norm}(m; \sigma)$
  m az ismeretlen becsülendő paraméter, σ ismeretlen

$n \geqslant 2,\ F \sim \mathbf{t}(n-1)$
$\tau_1 = \overline{\xi} - \frac{S_n^*}{\sqrt{n}} F^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$
$\tau_2 = \overline{\xi} + \frac{S_n^*}{\sqrt{n}} F^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$

- $\xi \in \mathbf{Exp}(\lambda)$
  λ az ismeretlen becsülendő paraméter
  $F \sim \mathbf{Gamma}(n;1)$
  $\tau_1 = \dfrac{1}{n\overline{\xi}} F^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$
  $\tau_2 = \dfrac{1}{n\overline{\xi}} F^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$

- $\xi \in \mathbf{Bin}(1;p)$
  p az ismeretlen becsülendő paraméter
  $\tau_1 = \frac{1}{n} \max\left\{ z \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{z} \binom{n}{i} \overline{\xi}^i (1-\overline{\xi})^{n-i} < \frac{\alpha}{2} \right\}$
  $\tau_2 = \frac{1}{n} \min\left\{ z \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{z} \binom{n}{i} \overline{\xi}^i (1-\overline{\xi})^{n-i} \geqslant 1 - \frac{\alpha}{2} \right\}$
  Nagy n-re:
  $c = \Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$
  $$\tau_1 = \frac{\overline{\xi} + \frac{c^2}{2n} - \frac{c}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{\xi}(1-\overline{\xi}) + \frac{c^2}{4n}}}{1+\frac{c^2}{n}} \simeq \overline{\xi} - \frac{c}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{\xi}(1-\overline{\xi})}$$
  $$\tau_2 = \frac{\overline{\xi} + \frac{c^2}{2n} + \frac{c}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{\xi}(1-\overline{\xi}) + \frac{c^2}{4n}}}{1+\frac{c^2}{n}} \simeq \overline{\xi} + \frac{c}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{\xi}(1-\overline{\xi})}$$

- ξ az $[a,b]$ intervallumon egyenletes eloszlású
  a ismert, b az ismeretlen becsülendő paraméter
  $F \sim \mathbf{Gamma}(n;1),\ c_1 = F^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right),\ c_2 = F^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$
  $\tau_1 = a + \left(e^{c_1} \prod_{i=1}^{n} (\xi_i - a)\right)^{\frac{1}{n}}$
  $\tau_2 = a + \left(e^{c_2} \prod_{i=1}^{n} (\xi_i - a)\right)^{\frac{1}{n}}$

1.4. Paraméteres hipotézisvizsgálatok

A következőkben $1-\alpha$ a próba szintjét jelenti.

- **Egymintás u-próba**
  $\xi \in \mathbf{Norm}(m;\sigma)$, m ismeretlen, σ ismert, $\xi_1, \ldots, \xi_n$ a ξ-re vonatkozó minta, $m_0 \in \mathbb{R}$ rögzített.
  $\boxed{H_0 \colon m = m_0}$
  $u = \dfrac{\overline{\xi} - m_0}{\sigma}\sqrt{n}$

H_1	kritikus tartomány
$m \neq m_0$	$2 - 2\Phi(\lvert u \rvert) < \alpha$
$m < m_0$	$\Phi(u) < \alpha$
$m > m_0$	$1 - \Phi(u) < \alpha$

- **Kétmintás u-próba**

  $\xi \in \mathbf{Norm}(m_1; \sigma_1)$, $\eta \in \mathbf{Norm}(m_2; \sigma_2)$ függetlenek, m_1, m_2 ismeretlenek, σ_1, σ_2 ismertek, $\xi_1, \ldots, \xi_{n_1}$ a ξ-re vonatkozó, $\eta_1, \ldots, \eta_{n_2}$ az η-ra vonatkozó minta.

  $\boxed{H_0 \colon m_1 = m_2}$

  $$u = \frac{\overline{\xi} - \overline{\eta}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

H_1	kritikus tartomány
$m_1 \neq m_2$	$2 - 2\Phi(\lvert u \rvert) < \alpha$
$m_1 < m_2$	$\Phi(u) < \alpha$
$m_1 > m_2$	$1 - \Phi(u) < \alpha$

- **Egymintás t-próba**

  $\xi \in \mathbf{Norm}(m; \sigma)$, m, σ ismeretlenek, $\xi_1, \ldots, \xi_n$ a ξ-re vonatkozó minta, $n \geqslant 2$, $m_0 \in \mathbb{R}$ rögzített.

  $\boxed{H_0 \colon m = m_0}$

  $$t = \frac{\overline{\xi} - m_0}{S_n^*}\sqrt{n} \quad \text{és} \quad F \sim \mathbf{t}(n-1)$$

H_1	kritikus tartomány
$m \neq m_0$	$2 - 2F(\lvert t \rvert) < \alpha$
$m < m_0$	$F(t) < \alpha$
$m > m_0$	$1 - F(t) < \alpha$

- **Kétmintás t-próba**

  $\xi \in \mathbf{Norm}(m_1; \sigma_1)$, $\eta \in \mathbf{Norm}(m_2; \sigma_2)$ függetlenek, $m_1, m_2, \sigma_1, \sigma_2$ ismeretlenek, $\sigma_1 = \sigma_2$, $\xi_1, \ldots, \xi_{n_1}$ a ξ-re vonatkozó, illetve $\eta_1, \ldots, \eta_{n_2}$ az η-ra vonatkozó minta, $n_1 \geqslant 2$, $n_2 \geqslant 2$.

  $\boxed{H_0 \colon m_1 = m_2}$

  $$t = \frac{\overline{\xi} - \overline{\eta}}{\sqrt{n_1 S_{\xi,n_1}^2 + n_2 S_{\eta,n_2}^2}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} \quad \text{és} \quad F \sim \mathbf{t}(n_1 + n_2 - 2)$$

H_1	kritikus tartomány
$m_1 \neq m_2$	$2 - 2F(\|t\|) < \alpha$
$m_1 < m_2$	$F(t) < \alpha$
$m_1 > m_2$	$1 - F(t) < \alpha$

- **Scheffé-módszer**
  $\xi \in \mathbf{Norm}(m_1; \sigma_1)$, $\eta \in \mathbf{Norm}(m_2; \sigma_2)$ függetlenek, $m_1, m_2, \sigma_1, \sigma_2$ ismeretlenek, $\xi_1, \dots, \xi_{n_1}$ a ξ-re vonatkozó, illetve $\eta_1, \dots, \eta_{n_2}$ az η-ra vonatkozó minta, $2 \leqslant n_1 \leqslant n_2$.
  $\boxed{H_0 \colon m_1 = m_2}$
  $\zeta_i = \xi_i - \sqrt{\frac{n_1}{n_2}}\eta_i + \frac{1}{\sqrt{n_1 n_2}} \sum_{k=1}^{n_1} \eta_k - \overline{\eta} \quad (i = 1, \dots, n_1)$
  ($n_1 = n_2$ esetén $\zeta_i = \xi_i - \eta_i$)
  $t = \frac{\overline{\zeta}}{S^*_{\zeta, n_1}} \sqrt{n_1}$ és $F \sim \mathbf{t}(n_1 - 1)$

H_1	kritikus tartomány
$m_1 \neq m_2$	$2 - 2F(\|t\|) < \alpha$
$m_1 < m_2$	$F(t) < \alpha$
$m_1 > m_2$	$1 - F(t) < \alpha$

  $n_1 = n_2$ esetén a módszer akkor is alkalmazható, ha a minták nem függetlenek, de csak akkor, ha $\xi - \eta$ normális eloszlású.

- **F-próba**
  $\xi \in \mathbf{Norm}(m_1; \sigma_1)$, $\eta \in \mathbf{Norm}(m_2; \sigma_2)$ függetlenek, $m_1, m_2, \sigma_1, \sigma_2$ ismeretlenek, $\xi_1, \dots, \xi_{n_1}$ a ξ-re vonatkozó, illetve $\eta_1, \dots, \eta_{n_2}$ az η-ra vonatkozó minta ($n_1 \geqslant 2$, $n_2 \geqslant 2$).
  $\boxed{H_0 \colon \sigma_1 = \sigma_2}$
  $\mathsf{F} = \frac{{S^*_{\xi, n_1}}^2}{{S^*_{\eta, n_2}}^2}$ és $F \sim \mathbf{F}(n_1 - 1; n_2 - 1)$

H_1	kritikus tartomány
$\sigma_1 \neq \sigma_2$	$2 \min\{\, F(\mathsf{F}), 1 - F(\mathsf{F}) \,\} < \alpha$
$\sigma_1 < \sigma_2$	$F(\mathsf{F}) < \alpha$
$\sigma_1 > \sigma_2$	$1 - F(\mathsf{F}) < \alpha$

- **Khi-négyzet próba**
  $\xi \in \mathbf{Norm}(m; \sigma)$, m, σ ismeretlenek, $\xi_1, \dots, \xi_n$ a ξ-re vonatkozó minta ($n \geqslant 2$).
  $\boxed{H_0 \colon \sigma = \sigma_0}$

$\chi^2 = \dfrac{S_n^2}{\sigma_0^2} n$ és $F \sim \mathbf{Khi}(n-1)$

H_1	kritikus tartomány
$\sigma \neq \sigma_0$	$2\min\{\, F(\chi^2), 1 - F(\chi^2) \,\} < \alpha$
$\sigma < \sigma_0$	$F(\chi^2) < \alpha$
$\sigma > \sigma_0$	$1 - F(\chi^2) < \alpha$

- **Statisztikai próba az exponenciális eloszlás paraméterére**

  $\xi \in \mathbf{Exp}(\lambda)$, λ ismeretlen, $\xi_1, \ldots, \xi_n$ a ξ-re vonatkozó minta, $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+$ rögzített.

  $\boxed{H_0\colon \lambda = \lambda_0}$

  $\gamma = \lambda_0 n\overline{\xi}$ és $F \sim \mathbf{Gamma}(n;1)$

H_1	kritikus tartomány
$\lambda \neq \lambda_0$	$2\min\{\, F(\gamma), 1 - F(\gamma) \,\} < \alpha$
$\lambda < \lambda_0$	$1 - F(\gamma) < \alpha$
$\lambda > \lambda_0$	$F(\gamma) < \alpha$

- **Statisztikai próba valószínűségre**

  $\xi \in \mathbf{Bin}(1;p)$, p ismeretlen, $0 < p_0 < 1$ rögzített és $\xi_1, \ldots, \xi_n$ a ξ-re vonatkozó minta.

  $\boxed{H_0\colon p = p_0}$

  $F^{-1}(x) = \min\left\{\, z \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{z} \binom{n}{i} p_0^i (1-p_0)^{n-i} \geqslant x \,\right\}$

  $\min\{\, np_0, n(1-p_0) \,\} \geqslant 10$ esetén

  $F^{-1}(x) \simeq np_0 - \frac{1}{2} + \sqrt{np_0(1-p_0)}\,\Phi^{-1}(x)$

H_1	kritikus tartomány
$p \neq p_0$	$n\overline{\xi} < F^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ vagy $n\overline{\xi} > F^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$
$p < p_0$	$n\overline{\xi} < F^{-1}(\alpha)$
$p > p_0$	$n\overline{\xi} > F^{-1}(1-\alpha)$
	feltétel
$p \neq p_0$	$1 \leqslant F^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) < np_0 < F^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \leqslant n-1$
$p < p_0$	$1 \leqslant F^{-1}(\alpha) < np_0$
$p > p_0$	$np_0 < F^{-1}(1-\alpha) \leqslant n-1$

1.5. Nemparaméteres hipotézisvizsgálatok

A következőkben $1 - \alpha$ a próba szintjét jelenti.

- **Tiszta illeszkedésvizsgálat valószínűségre**

  $A_1, \dots, A_r$ teljes eseményrendszer, $p_1, \dots, p_r \in \mathbb{R}_+$, $p_1 + \dots + p_r = 1$.

  $\boxed{H_0\colon\ \mathrm{P}(A_i) = p_i\ \forall i}$, ahol P a valódi valószínűség

  $\varrho_i (\geqslant 10)$ az A_i gyakorisága n kísérlet után

  $\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(\varrho_i - np_i)^2}{np_i}$ és $F \sim \mathbf{Khi}(r-1)$

  Kritikus tartomány: $1 - F(\chi^2) < \alpha$

- **Tiszta illeszkedésvizsgálat eloszlásfüggvényre**

  ξ-re vonatkozó minta $\xi_1, \dots, \xi_n$

  $\boxed{H_0\colon \xi \text{ eloszlásfüggvénye } F_0}$

  $a_0 = -\infty < a_1 < a_2 < \dots < a_{r-1} < a_r = \infty$

  $\varrho_i = \sum_{z=1}^{n} \mathrm{I}_{\xi_z \in [a_{i-1}, a_i)} \geqslant 10$

  $p_i = \mathrm{P}(a_{i-1} \leqslant \xi < a_i) = F_0(a_i) - F_0(a_{i-1})$, azaz $\mathrm{P} \in \mathcal{P}_{H_0}$

  $\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(\varrho_i - np_i)^2}{np_i}$ és $F \sim \mathbf{Khi}(r-1)$

  Kritikus tartomány: $1 - F(\chi^2) < \alpha$

- **Becsléses illeszkedésvizsgálat**

  ξ-re vonatkozó minta $\xi_1, \dots, \xi_n$

  F_ϑ eloszlásfüggvény minden $\vartheta = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_v) \in \Theta \subset \mathbb{R}^v$ esetén.

  $\boxed{H_0\colon \xi \text{ eloszlásfüggvénye } F_\vartheta \text{ valamely } \vartheta \in \Theta \text{ esetén}}$

  $a_0 = -\infty < a_1 < a_2 < \dots < a_{r-1} < a_r = \infty$

  $\varrho_i = \sum_{z=1}^{n} \mathrm{I}_{\xi_z \in [a_{i-1}, a_i)} \geqslant 10$

  $\widehat{\vartheta}_i$ a ϑ_i maximum likelihood becslése H_0 feltételezésével

  $\widehat{p}_i = \mathrm{P}_{(\widehat{\vartheta}_1, \dots, \widehat{\vartheta}_v)}(a_{i-1} \leqslant \xi < a_i) = F_{(\widehat{\vartheta}_1, \dots, \widehat{\vartheta}_v)}(a_i) - F_{(\widehat{\vartheta}_1, \dots, \widehat{\vartheta}_v)}(a_{i-1})$

  $\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(\varrho_i - n\widehat{p}_i)^2}{n\widehat{p}_i}$ és $F \sim \mathbf{Khi}(r-1-v)$

  Kritikus tartomány: $1 - F(\chi^2) < \alpha$

- **Függetlenségvizsgálat eseményrendszerekre**

  $A_1, \dots, A_r$ és $B_1, \dots, B_s$ két teljes eseményrendszer.

  $\boxed{H_0\colon\ \mathrm{P}(A_i \cap B_j) = \mathrm{P}(A_i)\,\mathrm{P}(B_j)\ \forall i, j}$, ahol P a valódi valószínűség.

  A kontingencia táblázat

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & B_1 & B_2 & \dots & B_s & \\
\hline
A_1 & \varrho_{11} & \varrho_{12} & \dots & \varrho_{1s} & k_1 \\
A_2 & \varrho_{21} & \varrho_{22} & \dots & \varrho_{2s} & k_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
A_r & \varrho_{r1} & \varrho_{r2} & \dots & \varrho_{rs} & k_r \\
\hline
 & l_1 & l_2 & \dots & l_s & n
\end{array}$$

$\varrho_{ij} \geqslant 10$ minden i, j esetén

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{(\varrho_{ij} - \frac{1}{n} k_i l_j)^2}{\frac{1}{n} k_i l_j} \qquad \text{és} \qquad F \sim \mathbf{Khi}\big((r-1)(s-1)\big)$$

Kritikus tartomány: $1 - F(\chi^2) < \alpha$

- **Függetlenségvizsgálat valószínűségi változókra**

  (ξ, η)-ra vonatkozó minta $(\xi_1, \eta_1), \dots, (\xi_n, \eta_n)$

  $\boxed{H_0\colon \xi \text{ és } \eta \text{ független}}$

  $a_0 = -\infty < a_1 < a_2 < \dots < a_{r-1} < a_r = \infty$

  $b_0 = -\infty < b_1 < b_2 < \dots < b_{s-1} < a_s = \infty$

  $$k_i = \sum_{z=1}^{n} \mathrm{I}_{\xi_z \in [a_{i-1}, a_i)} \qquad l_j = \sum_{z=1}^{n} \mathrm{I}_{\eta_z \in [b_{j-1}, b_j)}$$

  $$\varrho_{ij} = \sum_{z=1}^{n} \mathrm{I}_{\xi_z \in [a_{i-1}, a_i)} \, \mathrm{I}_{\eta_z \in [b_{j-1}, b_j)} \geqslant 10$$

  $$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{(\varrho_{ij} - \frac{1}{n} k_i l_j)^2}{\frac{1}{n} k_i l_j} \qquad \text{és} \qquad F \sim \mathbf{Khi}\big((r-1)(s-1)\big)$$

  Kritikus tartomány: $1 - F(\chi^2) < \alpha$

- **Homogenitásvizsgálat**

  ξ és η független valószínűségi változók, az ezekre vonatkozó minták $\xi_1, \dots, \xi_{n_1}$ illetve $\eta_1, \dots, \eta_{n_2}$.

  $\boxed{H_0\colon \xi \text{ és } \eta \text{ azonos eloszlású}}$

  $c_0 = -\infty < c_1 < c_2 < \dots < c_{r-1} < c_r = \infty$

  $$k_i = \sum_{z=1}^{n} \mathrm{I}_{\xi_z \in [c_{i-1}, c_i)} \geqslant 10 \quad l_j = \sum_{z=1}^{n} \mathrm{I}_{\eta_z \in [c_{j-1}, c_j)} \geqslant 10$$

  $$\chi^2 = n_1 n_2 \sum_{i=1}^{r} \frac{\left(\frac{k_i}{n_1} - \frac{l_i}{n_2}\right)^2}{k_i + l_i} \qquad \text{és} \qquad F \sim \mathbf{Khi}(r-1)$$

  Kritikus tartomány: $1 - F(\chi^2) < \alpha$

- **Kétmintás előjelpróba**

  (ξ, η)-ra vonatkozó minta $(\xi_1, \eta_1), \dots, (\xi_n, \eta_n)$

$\boxed{H_0:\ \mathrm{P}(\xi > \eta) = \frac{1}{2}}$

$B = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{I}_{\xi_i > \eta_i}$

$F^{-1}(x) = \min\left\{\, z \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{z} \binom{n}{i} (\frac{1}{2})^n \geqslant x \,\right\}$

$n \geqslant 20$ esetén $F^{-1}(x) \simeq \frac{1}{2}\,(n - 1 + \sqrt{n}\Phi^{-1}(x))$

H_1	kritikus tartomány
$\mathrm{P}(\xi > \eta) \neq \frac{1}{2}$	$B < F^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ vagy $B > F^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$
$\mathrm{P}(\xi > \eta) < \frac{1}{2}$	$B < F^{-1}(\alpha)$
$\mathrm{P}(\xi > \eta) > \frac{1}{2}$	$B > F^{-1}(1 - \alpha)$

- **Kolmogorov – Szmirnov-féle kétmintás próba**

  ξ és η folytonos eloszlásfüggvényű független valószínűségi változók, az ezekre vonatkozó minták $\xi_1, \ldots, \xi_n$ illetve $\eta_1, \ldots, \eta_n$ $(n > 30)$

  $\boxed{H_0:\ \xi \text{ és } \eta \text{ azonos eloszlású}}$

  ξ-re illetve η-ra vonatkozó mintákhoz tartozó tapasztalati eloszlásfüggvények F_n^* illetve G_n^*

  $D = \sqrt{\frac{n}{2}}\max_{i=1,\ldots,2n} |F_n^*(x_i) - G_n^*(x_i)|$,

  ahol $x_1 = \xi_1, \ldots, x_n = \xi_n, x_{n+1} = \eta_1, \ldots, x_{2n} = \eta_n$

  $K(z) = 1 + 2\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i e^{-2i^2z^2}$

  Kritikus tartomány: $K(D) \geqslant 1 - \alpha$

- **Kolmogorov – Szmirnov-féle egymintás próba**

  ξ folytonos eloszlásfüggvényű valószínűségi változó, az erre vonatkozó minta $\xi_1, \ldots, \xi_n$ $(n > 30)$

  $\boxed{H_0:\ \xi \text{ eloszlásfüggvénye } F}$

  F_n^* a tapasztalati eloszlásfüggvény

  $\widetilde{F}_n^*(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{I}_{\xi_k \leqslant x}$

  $D = \sqrt{n}\max_{i=1,\ldots,n} \max\{\, |F_n^*(x_i) - F(x_i)|, |\widetilde{F}_n^*(x_i) - F(x_i)|\,\}$

  $K(z) = 1 + 2\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i e^{-2i^2z^2}$

  Kritikus tartomány: $K(D) \geqslant 1 - \alpha$

1.6. Regressziószámítás

Az $\eta, \xi_1, \ldots, \xi_k$ valószínűségi változókra adjuk meg azt az $\eta \simeq g(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ közelítést adó g függvényt, melyre $\mathrm{E}\big(\eta - g(\xi_1, \ldots, \xi_k)\big)^2$ minimális. Az ilyen tulajdonságú g függvényt (*regressziós függvény*) a gyakorlatban csak becsülni tudjuk az

$(\eta, \xi_1, \ldots, \xi_k)$ valószínűségi vektorváltozóra vonatkozó

$$(\eta_i, \xi_{i1}, \ldots, \xi_{ik}), \quad i = 1, \ldots, n$$

minta alapján. Legyen ez a becslés $\widehat{g}$. Ezután az $\boxed{\eta \simeq \widehat{g}(\xi_1, \ldots, \xi_k)}$ közelítést fogjuk használni.

- **Lineáris regresszió**
  A regressziós függvényt csak a

  $$\boxed{g(x_1, \ldots, x_k) = a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_k x_k \quad (a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{R})}$$

  alakú függvények között keressük. Ekkor az

  $$\boxed{\eta \simeq \widehat{a}_0 + \widehat{a}_1 \xi_1 + \cdots + \widehat{a}_k \xi_k}$$

  közelítést fogjuk használni, ahol $\widehat{a}_0, \ldots, \widehat{a}_k$ rendre $a_0, \ldots, a_k$ becslései.

- **Fixpontos lineáris regresszió**
  Legyenek $t_0, \ldots, t_k \in \mathbb{R}$ rögzített konstansok. A regressziós függvényt

  $$\boxed{g(x_1, \ldots, x_k) = t_0 + a_1(x_1 - t_1) + \cdots + a_k(x_k - t_k) \quad (a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R})}$$

  alakban keressük. Ekkor az

  $$\boxed{\eta \simeq t_0 + \widehat{a}_1(\xi_1 - t_1) + \cdots + \widehat{a}_k(\xi_k - t_k)}$$

  közelítést fogjuk használni, ahol $\widehat{a}_1, \ldots, \widehat{a}_k$ rendre $a_1, \ldots, a_k$ becslései.

  A $(t_1, \ldots, t_k, t_0)$ pontot *fixpontnak* nevezzük, mert a kapott g biztosan ráilleszkedik.

- **Polinomos regresszió**
  $k = 1$ és a regressziós függvényt

  $$\boxed{y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_r x^r \quad (a_0, \ldots, a_r \in \mathbb{R}_+)}$$

  alakban keressük. Az $a_0, \ldots, a_r$ együtthatókat az $\boxed{\eta, \xi_1, \xi_1^2, \ldots, \xi_1^r}$ között végrehajtott lineáris regresszió adja.

- **Hatványkitevős regresszió**
  $k = 1$ és a regressziós függvényt

$$\boxed{y = ax^b \quad (a \in \mathbb{R}_+,\ b \in \mathbb{R})}$$

  alakban keressük. Ez azzal ekvivalens, hogy

$$\ln y = \ln a + b \ln x,$$

  így ekkor $\boxed{\ln \eta \text{ és } \ln \xi_1}$ között lineáris regressziót végrehajtva, a kapott a_0, a_1 együtthatókra teljesül, hogy

$$\boxed{a = e^{a_0}, \quad b = a_1}.$$

- **Exponenciális regresszió**
  $k = 1$ és a regressziós függvényt

$$\boxed{y = ab^x \quad (a, b \in \mathbb{R}_+)}$$

  alakban keressük. Ez azzal ekvivalens, hogy

$$\ln y = \ln a + (\ln b)x,$$

  így ekkor $\boxed{\ln \eta \text{ és } \xi_1}$ között lineáris regressziót végrehajtva, a kapott a_0, a_1 együtthatókra teljesül, hogy

$$\boxed{a = e^{a_0}, \quad b = e^{a_1}}.$$

- **Logaritmikus regresszió**
  $k = 1$ és a regressziós függvényt

$$\boxed{y = a + b \ln x \quad (a, b \in \mathbb{R})}$$

  alakban keressük. Így ekkor $\boxed{\eta \text{ és } \ln \xi_1}$ között lineáris regressziót végrehajtva,

$$\boxed{a = a_0,\ b = a_1}.$$

- **Hiperbolikus regresszió**
$k = 1$ és a regressziós függvényt

$$\boxed{y = \frac{1}{a+bx} \qquad (a, b \in \mathbb{R})}$$

alakban keressük. Ez azzal ekvivalens, hogy

$$y^{-1} = a + bx,$$

így ekkor $\boxed{\eta^{-1} \text{ és } \xi_1}$ között lineáris regressziót végrehajtva,

$$\boxed{a = a_0, \ b = a_1}.$$

1.7. Excel függvények

Képlet bevitele

Minden képletet = jellel kell kezdeni. Ha a képlet egyértékű eredményt ad, akkor nyomjon *Enter*-t.

Tömbképlet bevitele

Ha a képlet eredménye tömb (például egy mátrix inverze), akkor először jelölje ki a megfelelő méretű tömböt, gépelje be a képletet (előtte =), majd nyomjon *Ctrl+Shift+Enter*-t.

Tömbképlet javítása

Ha egy tömbképletet javítani akar, akkor jelölje ki a tömbképletre vonatkozó tömböt, *F2*, javítás, majd *Ctrl+Shift+Enter*.

Műveletek

+ összeadás
- kivonás
* szorzás
/ osztás
^ hatványozás

Relációk

= egyenlő
< kisebb
> nagyobb
<= kisebb vagy egyenlő

`>=` nagyobb vagy egyenlő

`<>` nem egyenlő

Konstansok

$e = \boxed{\texttt{KITEVŐ(1)}}$

$\pi = \boxed{\texttt{PI()}}$

1.7.1. Logikai függvények

`HA(feltétel;ha igaz;ha hamis)`

`ÉS(feltétel1;feltétel2;...)`

`VAGY(feltétel1;feltétel2;...)`

1.7.2. Elemi függvények

$|x| = \boxed{\texttt{ABS}(x)}$ $x \in \mathbb{R}$

$[x] = \boxed{\texttt{INT}(x)}$ $x \in \mathbb{R}$

$\operatorname{sign} x = \boxed{\texttt{ELŐJEL}(x)}$ $x \in \mathbb{R}$

$\ln x = \boxed{\texttt{LN}(x)}$ $x > 0$

$\log_a x = \boxed{\texttt{LOG}(x;a)}$ $x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$

$\sqrt{x} = \boxed{\texttt{GYÖK}(x)}$ $x \geqslant 0$

$x^a = \boxed{\texttt{HATVÁNY}(x;a)} = \boxed{x\texttt{\^{}}a}$

$e^x = \boxed{\texttt{KITEVŐ}(x)}$ $x \in \mathbb{R}$

$\sin x = \boxed{\texttt{SIN}(x)}$ $x \in \mathbb{R}$

$\cos x = \boxed{\texttt{COS}(x)}$ $x \in \mathbb{R}$

$\operatorname{tg} x = \boxed{\texttt{TAN}(x)}$ $x \in \mathbb{R},\ x \neq k\frac{\pi}{2}$, ahol k páratlan egész

$\arcsin x = \boxed{\texttt{ARCSIN}(x)}$ $x \in [-1, 1]$

$\arccos x = \boxed{\texttt{ARCCOS}(x)}$ $x \in [-1, 1]$

$\operatorname{arctg} x = \boxed{\texttt{ARCTAN}(x)}$ $x \in \mathbb{R}$

$\sum_{i=0}^{r} a_i x^{k+im} = \boxed{\texttt{SERIESSUM}(x;k;m;\texttt{A:A})}$, ahol az `A` oszlopban vannak az $a_0, \ldots, a_r$ valós számok ($x \in \mathbb{R},\ k, m \in \mathbb{N}$)

$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \boxed{\texttt{FISHER}(x)}$ $-1 < x < 1$

$\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \boxed{\texttt{INVERZ.FISHER}(x)}$ $x \in \mathbb{R}$

$\ln \Gamma(x) = \ln \int\limits_0^\infty u^{x-1} e^{-u}\,\mathrm{d}u = \boxed{\texttt{GAMMALN}(x)}$ $x > 0$

$\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty u^{x-1} e^{-u}\,\mathrm{d}u = \boxed{\texttt{KITEVŐ(GAMMALN}(x)\texttt{)}}$ $x > 0$

1.7.3. Mátrixok

$\boxed{\texttt{MDETERM(tömb)}}$ A `tömb`-ben található $n \times n$ típusú mátrix determinánsa

$\boxed{\texttt{TRANSZPONÁLÁS(tömb)}}$ A `tömb`-ben található $m \times n$ típusú mátrix transzponáltja, mely egy $n \times m$ méretű tömbben helyezkedik el (tömbképlet!).

$\boxed{\texttt{INVERZ.MÁTRIX(tömb)}}$ A `tömb`-ben található $n \times n$ típusú mátrix inverze, mely egy $n \times n$ méretű tömbben helyezkedik el (tömbképlet!).

$\boxed{\texttt{MSZORZAT(tömb1;tömb2)}}$ A `tömb1`-ben található $m \times n$ típusú mátrix és a `tömb2`-ben található $n \times k$ típusú mátrix szorzata, mely egy $m \times k$ méretű tömbben helyezkedik el (tömbképlet!).

1.7.4. Kombinatorika

$m! = \boxed{\texttt{FACT(}m\texttt{)}}$ $m \in \mathbb{N}$

$m!! = \boxed{\texttt{FACTDOUBLE(}m\texttt{)}}$ $m \in \mathbb{N}$ ($m!!$ az ún. *szemifaktoriális*, amely $1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m$, ha m páratlan, illetve $2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot m$, ha m páros.)

$\binom{m}{k} = \boxed{\texttt{KOMBINÁCIÓK(}m\texttt{;}k\texttt{)}}$ $m \in \mathbb{N},\ k = 0, \ldots, m$

$\frac{m!}{(m-k)!} = \boxed{\texttt{VARIÁCIÓK(}m\texttt{;}k\texttt{)}}$ $m \in \mathbb{N},\ k = 0, \ldots, m$

$\frac{(k_1+k_2+\cdots+k_r)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_r!} = \boxed{\texttt{MULTINOMIAL(}k_1\texttt{;}k_2\texttt{;}\ldots\texttt{;}k_r\texttt{)}}$ $k_1, k_2, \ldots, k_r \in \mathbb{N}$

1.7.5. Pszeudo-véletlen szám generálása

$\boxed{\texttt{VÉL()}}$ $[0, 1)$ intervallumon egyenletes eloszlású pszeudo-véletlen szám

$\boxed{\texttt{RANDBETWEEN(}a\texttt{;}b\texttt{)}}$ ($a, b \in \mathbb{N},\ a < b$) diszkrét egyenletes eloszlású pszeudo-véletlen szám az $\{ a, a + 1, \ldots, b \}$ halmazon

1.7.6. Statisztikák

Legyen a ξ valószínűségi változóra vonatkozó $x_1, \ldots, x_n$ mintarealizáció az `A` oszlopban. Jelölje $x_1^*, \ldots, x_n^*$ a rendezett mintarealizációt. Ekkor

$x_1^* = \boxed{\texttt{MIN(A:A)}}$

$x_n^* = \boxed{\texttt{MAX(A:A)}}$

$x_k^* = \boxed{\texttt{KICSI(A:A;}k\texttt{)}}$ $k = 1, \ldots, n$

$x_{n-k}^* = \boxed{\texttt{NAGY(A:A;}k+1\texttt{)}}$ $k = 0, \ldots, n-1$

$\min\{ k : x_k^* = x_i \} = \boxed{\texttt{SORSZÁM(}x_i\texttt{;A:A;1)}}$ $i = 1, \ldots, n$

$\min\{ k : x_{n-k}^* = x_i \} + 1 = \boxed{\texttt{SORSZÁM(}x_i\texttt{;A:A;0)}}$ $i = 1, \ldots, n$

$n = \boxed{\texttt{DARAB(A:A)}}$

$\overline{\xi} = \boxed{\texttt{ÁTLAG(A:A)}}$

$S_n = \boxed{\texttt{SZÓRÁSP(A:A)}}$

$S_n^2 = \boxed{\texttt{VARP(A:A)}}$

$S_n^* = \boxed{\texttt{SZÓRÁS(A:A)}}$

$S_n^{*2} = \boxed{\texttt{VAR(A:A)}}$

tapasztalati medián $= \boxed{\texttt{MEDIÁN(A:A)}}$

tapasztalati módusz $= \boxed{\texttt{MÓDUSZ(A:A)}}$

$100t$%-os tapasztalati kvantilis $= \boxed{\texttt{PERCENTILIS(A:A;}t\texttt{)}}$ $0 \leqslant t \leqslant 1$

tapasztalati alsó kvartilis $= \boxed{\texttt{KVARTILIS(A:A;1)}}$

tapasztalati felső kvartilis $= \boxed{\texttt{KVARTILIS(A:A;3)}}$

tapasztalati ferdeség $= \boxed{\texttt{FERDESÉG(A:A)}}$

tapasztalati lapultság (csúcsosság) $= \boxed{\texttt{CSÚCSOSSÁG(A:A)}}$

$\sum_{i=1}^n x_i = \boxed{\texttt{SZUM(A:A)}}$

$\sum_{i=1}^n x_i^2 = \boxed{\texttt{NÉGYZETÖSSZEG(A:A)}}$

$\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{\xi})^2 = \boxed{\texttt{SQ(A:A)}}$

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |x_i - \overline{\xi}| = \boxed{\texttt{ÁTL.ELTÉRÉS(A:A)}}$

$\prod_{i=1}^n x_i = \boxed{\texttt{SZORZAT(A:A)}}$

$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} = \boxed{\texttt{MÉRTANI.KÖZÉP(A:A)}}$ $x_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$

$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}\right)^{-1} = \boxed{\texttt{HARM.KÖZÉP(A:A)}}$ $x_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$

$\sum_{x_i < a} x_i = \boxed{\texttt{SZUMHA(A:A;"<}a\texttt{")}}$ $a \in \mathbb{R}$

$\sum_{a < x_i \leqslant b} x_i = \boxed{\texttt{SZUMHATÖBB(A:A;A:A;">}a\texttt{";A:A;"<=}b\texttt{")}}$ $a, b \in \mathbb{R}$

$\frac{1}{n}\sum_{x_i < a} x_i = \boxed{\texttt{ÁTLAGHA(A:A;"<}a\texttt{")}}$ $a \in \mathbb{R}$

$\frac{1}{n}\sum_{a < x_i \leqslant b} x_i = \boxed{\texttt{ÁTLAGHATÖBB(A:A;A:A;">}a\texttt{";A:A;"<=}b\texttt{")}}$ $a, b \in \mathbb{R}$

$\sum_{i=1}^n \mathrm{I}_{x_i < a} = \boxed{\texttt{DARABTELI(A:A;"<}a\texttt{")}}$ $a \in \mathbb{R}$

$\sum_{i=1}^n \mathrm{I}_{a < x_i \leqslant b} = \boxed{\texttt{DARABHATÖBB(A:A;">}a\texttt{";A:A;"<=}b\texttt{")}}$ $a, b \in \mathbb{R}$

Legyen a (ξ, η) kétdimenziós valószínűségi vektorváltozóra vonatkozó mintarealizáció $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$. Az `A` oszlop i-edik sorában legyen x_i, illetve a `B` oszlop i-edik sorában legyen y_i. Ekkor

$\mathrm{Cov}_n(\xi, \eta) = \boxed{\texttt{KOVAR(A:A;B:B)}}$

$\mathrm{Corr}_n(\xi, \eta) = \boxed{\texttt{KORREL(A:A;B:B)}}$

$\sum_{i=1}^n x_i y_i = \boxed{\texttt{SZORZATÖSSZEG(A:A;B:B)}}$

$\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 = \boxed{\texttt{SZUMXBŐLY2(A:A;B:B)}}$

$\sum_{i=1}^n (x_i^2 - y_i^2) = \boxed{\texttt{SZUMX2BŐLY2(A:A;B:B)}}$

$\sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2) = \boxed{\texttt{SZUMX2MEGY2(A:A;B:B)}}$

1.7.7. Eloszlások

- **Binomiális eloszlás** (r-edrendű p paraméterű)
  $\binom{r}{k}p^k(1-p)^{r-k} = \boxed{\texttt{BINOM.ELOSZLÁS(}k\texttt{;}r\texttt{;}p\texttt{;HAMIS)}}$
  $r \in \mathbb{N},\ k = 0, \ldots, r,\ 0 < p < 1$

- **Hipergeometrikus eloszlás**
  $\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{r-k}}{\binom{N}{r}} = \boxed{\texttt{HIPERGEOM.ELOSZLÁS(}k\texttt{;}r\texttt{;}M\texttt{;}N\texttt{)}}$
  $r, M, N \in \mathbb{N},\ M < N,\ r \leqslant \min\{\,M, N-M\,\},\ k = 0, \ldots, r$

- **Poisson-eloszlás** (λ paraméterű)
  $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \boxed{\texttt{POISSON(}k\texttt{;}\lambda\texttt{;HAMIS)}}$ $\lambda > 0,\ k = 0, 1, \ldots$

1.7.8. Eloszlásfüggvények

- **Binomiális eloszlás** (r-edrendű p paraméterű)
  $\sum_{i=0}^{k}\binom{r}{i}p^i(1-p)^{r-i} = \boxed{\texttt{BINOM.ELOSZLÁS(}k\texttt{;}r\texttt{;}p\texttt{;IGAZ)}}$
  $r \in \mathbb{N},\ k = 0, \ldots, r,\ 0 < p < 1$

- **Poisson-eloszlás** (λ paraméterű)
  $\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda} = \boxed{\texttt{POISSON(}k\texttt{;}\lambda\texttt{;IGAZ)}}$ $\lambda > 0,\ k = 0, 1, \ldots$

- **Exponenciális eloszlás** (λ paraméterű)
  $F(x) = 1 - e^{-\lambda x} = \boxed{\texttt{EXP.ELOSZLÁS(}x\texttt{;}\lambda\texttt{;IGAZ)}}$ $\lambda > 0,\ x \geqslant 0$

- **Gamma-eloszlás** (r-edrendű λ paraméterű)
  $F(x) = \boxed{\texttt{GAMMA.ELOSZLÁS(}x\texttt{;}r\texttt{;1/}\lambda\texttt{;IGAZ)}}$ $r, \lambda > 0,\ x \geqslant 0$

- **Standard normális eloszlás**
  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \boxed{\texttt{STNORMELOSZL(}x\texttt{)}}$ $x \in \mathbb{R}$

- **Normális eloszlás** (m és σ paraméterű)
  $F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) = \boxed{\texttt{NORM.ELOSZL(}x\texttt{;}m\texttt{;}\sigma\texttt{;IGAZ)}}$
  $m, x \in \mathbb{R},\ \sigma > 0$

- **Khi-négyzet eloszlás** (s szabadsági fokú)
  $F(x) = \boxed{\texttt{1-KHI.ELOSZLÁS(}x\texttt{;}s\texttt{)}}$ $s \in \mathbb{N},\ x \geqslant 0$

- **t-eloszlás** (s szabadsági fokú)
  $F(x) = \boxed{\texttt{1-T.ELOSZLÁS(}x\texttt{;}s\texttt{;1)}}$ $s \in \mathbb{N},\ x \geqslant 0$
  $F(x) = \boxed{\texttt{T.ELOSZLÁS(}-x\texttt{;}s\texttt{;1)}}$ $s \in \mathbb{N},\ x < 0$
  $\mathrm{P}(|\xi| > x) = 2 - 2F(x) = \boxed{\texttt{T.ELOSZLÁS(}x\texttt{;}s\texttt{;2)}}$ $s \in \mathbb{N},\ x \geqslant 0$

- **F-eloszlás** (s_1 és s_2 szabadsági fokú)
  $F(x) = \boxed{\texttt{1-F.ELOSZLÁS(}x\texttt{;}s_1\texttt{;}s_2\texttt{)}}$ $s_1, s_2 \in \mathbb{N},\ x \geqslant 0$

1.7.9. Sűrűségfüggvények

- **Exponenciális eloszlás** (λ paraméterű)
  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} = \boxed{\texttt{EXP.ELOSZLÁS(}x\texttt{;}\lambda\texttt{;HAMIS)}}$ $\lambda > 0,\ x \geqslant 0$

- **Gamma-eloszlás** (r-edrendű λ paraméterű)
  $f(x) = \boxed{\texttt{GAMMA.ELOSZLÁS(}x\texttt{;}r\texttt{;1/}\lambda\texttt{;HAMIS)}}$ $r, \lambda > 0,\ x \geqslant 0$

- **Khi-négyzet eloszlás** (s szabadsági fokú)
  $f(x) = \boxed{\texttt{GAMMA.ELOSZLÁS(}x\texttt{;}s\texttt{/2;2;HAMIS)}}$ $x \geqslant 0$

- **Standard normális eloszlás**
  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \boxed{\texttt{NORM.ELOSZL(}x\texttt{;0;1;HAMIS)}}$ $x \in \mathbb{R}$

- **Normális eloszlás** (m és σ paraméterű)
  $f(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) = \boxed{\texttt{NORM.ELOSZL(}x\texttt{;}m\texttt{;}\sigma\texttt{;HAMIS)}}$
  $m, x \in \mathbb{R},\ \sigma > 0$

1.7.10. Inverz eloszlásfüggvények

- **Normális eloszlás** (m és σ paraméterű)
  $F^{-1}(x) = \boxed{\texttt{INVERZ.NORM(}x\texttt{;}m\texttt{;}\sigma\texttt{)}}$ $m \in \mathbb{R},\ \sigma > 0,\ 0 < x < 1$

- **Standard normális eloszlás**
  $\Phi^{-1}(x) = \boxed{\texttt{INVERZ.STNORM(}x\texttt{)}}$ $0 < x < 1$

- **Khi-négyzet eloszlás** (s szabadsági fokú)
  $F^{-1}(x) = \boxed{\texttt{INVERZ.KHI(}1-x\texttt{;}s\texttt{)}}$ $s \in \mathbb{N},\ 0 < x < 1$

- **t-eloszlás** (s szabadsági fokú)
  $F^{-1}(x) = \boxed{\texttt{-INVERZ.T(}2x\texttt{;}s\texttt{)}}$ $s \in \mathbb{N},\ 0 < x < 0{,}5$
  $F^{-1}(x) = \boxed{\texttt{INVERZ.T(}2-2x\texttt{;}s\texttt{)}}$ $s \in \mathbb{N},\ 0{,}5 \leqslant x < 1$

- **Gamma-eloszlás** (r-edrendű λ paraméterű)
  $F^{-1}(x) = \boxed{\texttt{INVERZ.GAMMA(}x\texttt{;}r\texttt{;1/}\lambda\texttt{)}}$ $r, \lambda > 0,\ 0 < x < 1$

- **F-eloszlás** (s_1 és s_2 szabadsági fokú)
  $F^{-1}(x) = \boxed{\texttt{INVERZ.F(}1-x\texttt{;}s_1\texttt{;}s_2\texttt{)}}$ $s_1, s_2 \in \mathbb{N},\ 0 < x < 1$

1.7.11. Grafikus illeszkedésvizsgálat

$\boxed{\texttt{MEREDEKSÉG(tömb\_}y_i\texttt{;tömb\_}x_i\texttt{)}}$ Az $(x_i, y_i),\ i = 1, \ldots, r$ pontokra illesztett lineáris trendvonal meredeksége.
$\boxed{\texttt{METSZ(tömb\_}y_i\texttt{;tömb\_}x_i\texttt{)}}$ Az $(x_i, y_i),\ i = 1, \ldots, r$ pontokra illesztett lineáris trendvonal függőleges tengelymetszete.

1.7.12. Intervallumbecslés

$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = \boxed{\texttt{MEGBÍZHATÓSÁG(}\alpha\texttt{;}\sigma\texttt{;}n\texttt{)}}$ $0 < \alpha < 1,\ \sigma > 0,\ n \in \mathbb{N}$
$\frac{S_n^*}{\sqrt{n}}F^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \simeq \boxed{\texttt{MEGBÍZHATÓSÁG(}\alpha\texttt{;}S_n^*\texttt{;}n\texttt{)}}$ $F \sim \mathbf{t}(n-1),\ 0 < \alpha < 1,\ \sigma > 0,\ n \in \mathbb{N}$. A becslés annál pontosabb, minél nagyobb az n.
$\min\left\{ c \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{c} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \geqslant x \right\} = \boxed{\texttt{KRITBINOM(}n\texttt{;}p\texttt{;}x\texttt{)}}$ $n \in \mathbb{N},\ 0 < p < 1,\ 0 < x < 1$

1.7.13. Paraméteres hipotézisvizsgálatok

A ξ-re illetve η-ra vonatkozó mintarealizációk az `A` illetve `B` oszlopokban vannak.

- **Egymintás u-próba**
  $1 - \Phi(u) = \boxed{\texttt{Z.PRÓBA(A:A;}m_0\texttt{;}\sigma\texttt{)}}$
  $2 - 2\Phi(|u|) = \boxed{\texttt{2*MIN(Z.PRÓBA(A:A;}m_0\texttt{;}\sigma\texttt{);1-Z.PRÓBA(A:A;}m_0\texttt{;}\sigma\texttt{))}}$

- **Egymintás t-próba**
  A ξ-re vonatkozó mintarealizáció minden tagja mellett szerepeljen m_0 értéke a `B` oszlopban.
  $2 - 2F(|t|) = \boxed{\texttt{T.PRÓBA(A:A;B:B;2;1)}}$
  $F(t) = \boxed{\texttt{T.PRÓBA(A:A;B:B;1;1)}}$ ha $\overline{\xi} \leqslant m_0$
  $1 - F(t) = \boxed{\texttt{T.PRÓBA(A:A;B:B;1;1)}}$ ha $\overline{\xi} \geqslant m_0$

- **F-próba**
  $2\min\{ F(\mathsf{F}), 1 - F(\mathsf{F}) \} = \boxed{\texttt{F.PRÓBA(A:A;B:B)}}$
  $F(\mathsf{F}) = \boxed{\texttt{F.PRÓBA(A:A;B:B)/2}}$, ha ${S^*_{\xi,n_1}}^2 \leqslant {S^*_{\eta,n_2}}^2$
  $1 - F(\mathsf{F}) = \boxed{\texttt{F.PRÓBA(A:A;B:B)/2}}$, ha ${S^*_{\xi,n_1}}^2 \geqslant {S^*_{\eta,n_2}}^2$

- **Kétmintás t-próba**
  $2 - 2F(|t|) = \boxed{\texttt{T.PRÓBA(A:A;B:B;2;2)}}$
  $F(t) = \boxed{\texttt{T.PRÓBA(A:A;B:B;1;2)}}$ ha $\overline{\xi} \leqslant \overline{\eta}$
  $1 - F(t) = \boxed{\texttt{T.PRÓBA(A:A;B:B;1;2)}}$ ha $\overline{\xi} \geqslant \overline{\eta}$

- **Scheffé-módszer azonos mintaelemszámra**
  $2 - 2F(|t|) =$ `T.PRÓBA(A:A;B:B;2;1)`
  $F(t) =$ `T.PRÓBA(A:A;B:B;1;1)` ha $\overline{\xi} \leqslant \overline{\eta}$
  $1 - F(t) =$ `T.PRÓBA(A:A;B:B;1;1)` ha $\overline{\xi} \geqslant \overline{\eta}$

- **Scheffé-módszer különböző mintaelemszámra**
  Az ζ-ra vonatkozó mintarealizáció a `C` oszlopban van, és minden tagja mellett szerepeljen 0 a `D` oszlopban.
  $2 - 2F(|t|) =$ `T.PRÓBA(C:C;D:D;2;1)`
  $F(t) =$ `T.PRÓBA(C:C;D:D;1;1)` ha $\overline{\xi} \leqslant \overline{\eta}$
  $1 - F(t) =$ `T.PRÓBA(C:C;D:D;1;1)` ha $\overline{\xi} \geqslant \overline{\eta}$

- **Statisztikai próba az exponenciális eloszlás paraméterére**
  $F(\gamma) =$ $\boxed{\texttt{GAMMA.ELOSZLÁS(}\lambda_0\texttt{*SZUM(A:A);DARAB(A:A);1;IGAZ)}}$

- **Statisztikai próba valószínűségre**
  $\min\left\{ z \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{z} \binom{n}{i} p_0^i (1-p_0)^{n-i} \geqslant x \right\} =$ $\boxed{\texttt{KRITBINOM(}n\texttt{;}p_0\texttt{;}x\texttt{)}}$

1.7.14. Nemparaméteres hipotézisvizsgálatok

- **Tiszta illeszkedésvizsgálat**
  $1 - F(\chi^2) =$ $\boxed{\texttt{KHI.PRÓBA(}\varrho_i\texttt{ tartománya;}np_i\texttt{ tartománya)}}$

- **Becsléses illeszkedésvizsgálat**
  $\Sigma_i := \frac{(\varrho_i - n\widehat{p}_i)^2}{n\widehat{p}_i}$
  $1 - F(\chi^2) =$ $\boxed{\texttt{=KHI.ELOSZLÁS(SZUM(}\Sigma_i\texttt{ tartománya);}r-1-v\texttt{)}}$

- **Függetlenségvizsgálat**
  $1 - F(\chi^2) =$ $\boxed{\texttt{KHI.PRÓBA(}\varrho_{ij}\texttt{ tartománya;}k_i l_j/n\texttt{ tartománya)}}$

- **Homogenitásvizsgálat**
  $\nu_{ij} := \frac{(k_i + l_i) n_j}{n_1 + n_2}$
  $1 - F(\chi^2) =$ $\boxed{\texttt{KHI.PRÓBA(}k_i, l_j\texttt{ tartománya;}\nu_{ij}\texttt{ tartománya)}}$

- **Kétmintás előjelpróba**
  $F^{-1}(x) =$ $\boxed{\texttt{KRITBINOM(}n\texttt{;1/2;}x\texttt{)}}$

1.7.15. Regressziószámítás

- **Lineáris regresszió**
  `eta`: η-ra vonatkozó mintarealizációt tartalmazó $n \times 1$ méretű tömb.

`xi`: $(\xi_1,\dots,\xi_k)$-ra vonatkozó mintarealizációt tartalmazó $n\times k$ méretű tömb.

`x`: $x_1,\dots,x_k$ számokat tartalmazó $1\times k$ méretű tömb.

$(\widehat{a}_k,\widehat{a}_{k-1},\dots,\widehat{a}_0) =$ `LIN.ILL(eta;xi)` ($1\times(k+1)$ méretű tömbképlet!)

$\widehat{a}_0+\widehat{a}_1x_1+\cdots+\widehat{a}_kx_k =$ `TREND(eta;xi;x)`

- **Fixpontos lineáris regresszió**

  `eta-t`: $(\eta-t_0)$-ra vonatkozó mintarealizációt tartalmazó $n\times 1$ méretű tömb.

  `xi-t`: $(\xi_1-t_1,\dots,\xi_k-t_k)$-ra vonatkozó mintarealizációt tartalmazó $n\times k$ méretű tömb.

  `x-t`: $x_1-t_1,\dots,x_k-t_k$ számokat tartalmazó $1\times k$ méretű tömb.

  $(\widehat{a}_k,\widehat{a}_{k-1},\dots,\widehat{a}_1) =$ `LIN.ILL(eta-t;xi-t;HAMIS)` ($1\times k$ méretű tömbképlet!)

  $\widehat{a}_1(x_1-t_1)+\cdots+\widehat{a}_k(x_k-t_k) =$ `TREND(eta-t;xi-t;x-t;HAMIS)`

- **Exponenciális regresszió**

  `eta`: η-ra vonatkozó mintarealizációt tartalmazó $n\times 1$ méretű tömb.

  `xi`: ξ_1-re vonatkozó mintarealizációt tartalmazó $n\times 1$ méretű tömb.

  $(\widehat{b},\widehat{a}) =$ `LOG.ILL(eta;xi)` (1×2 méretű tömbképlet!)

  $\widehat{a}\cdot\widehat{b}^x =$ `NÖV(eta;xi;`x`)`