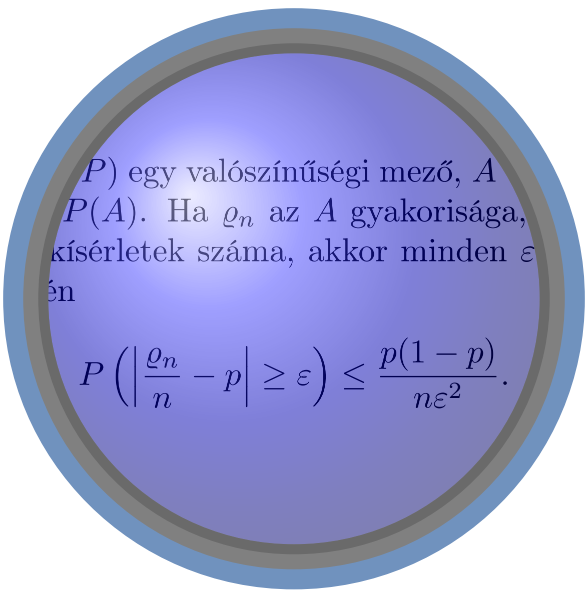
Tómács Tibor

Valószínűségszámítás



EGER 1774
ESZTERHÁZY KÁROLY KATOLIKUS EGYETEM
Matematikai és Informatikai Intézet

Tómács Tibor

Valószínűségszámítás

Eger, 2024. április 15.

Tartalomjegyzék

Előszó

Ez a jegyzet az Eszterházy Károly Katolikus Egyetem matematika szakos hallgatóinak tartott valószínűségszámítás előadásai alapján készült, mely az alábbi címről szabadon letölthető:

`https://tomacstibor.uni-eszterhazy.hu/tananyagok/Valoszinusegszamitas.pdf`

A jegyzetben található tételek és lemmák bizonyításai közül csak a viszonylag rövideket és könnyen átláthatóakat közöltük. A többi megtalálható például *Tómács Tibor: Mérték és integrál* című könyvében:

`https://tomacstibor.uni-eszterhazy.hu/tananyagok/Mertekelmelet.pdf`

A jegyzethez készült egy gyakorlatokat tartalmazó összeállítás is, mely az alábbi címről letölthető:

`https://tomacstibor.uni-eszterhazy.hu/tananyagok/Valoszinusegszamitasi_gyakorlatok.pdf`

A jegyzetben a matematikai analízis órákon bevezetett jelöléseket használjuk.

1. fejezet

A valószínűségszámítás alapfogalmai

1.1. Bernoulli tapasztalata

Bizonyos jelenségeknél az összes körülmény figyelembe vétele nagyon nehéz vagy lehetetlen. Ennek oka lehet például, hogy a jelenség hátterében meghúzódó körülmények rendszere a tudomány mai állása szerint még nem teljesen feltárt, vagy nem tudjuk mérni őket, vagy számuk túl nagy és kapcsolatuk nagyon bonyolult. Ilyenkor a figyelembe vett körülmények összessége nem határozza meg egy esemény bekövetkezésének elegendő okát. Az ilyen eseményeket *véletlen eseményeknek* nevezzük. Például dobókockával játszva csak azt a tényt vesszük figyelembe, hogy feldobtuk. Ez viszont nem határozza meg a dobás eredményét egyértelműen, így például a hatos dobása véletlen eseményt jelent számunkra.

Ha egy véletlen kimenetelű jelenség sokszor megismétlődhet, akkor *véletlen tömegjelenségről* beszélünk. Az ilyen típusú jelenségekről a véletlenszerűségük ellenére is áttekintést nyerhetünk. Például a radioaktív bomlás esetén minden egyes atommag bomlása véletlennek tekinthető, mégis sok milliárd atommag esetében már előre meg tudjuk mondani nagy pontossággal, hogy egy meghatározott időn belül hány százalékuk fog elbomlani. Ez a bomlás úgynevezett exponenciális törvénye, melyet a valószínűségszámítás segítségével írhatunk le.

A valószínűségszámítás a véletlen kimenetelű jelenségek illetve kísérletek matematikai modellezése.

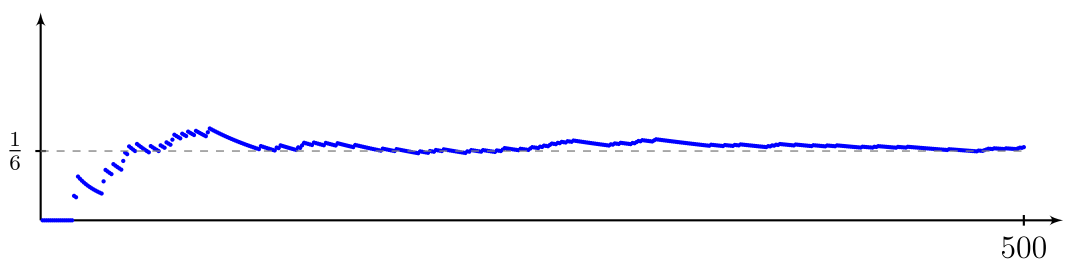
Egy kísérletben azt tekintjük *megfigyelhető eseménynek* (a továbbiakban röviden csak eseményt mondunk), melyről egyértelműen eldönthető a kísérlet elvégzése után, hogy bekövetkezett-e vagy sem. Így az, hogy egy bizonyos esemény bekövetkezett, matematikai értelemben logikai ítélet. Ebből a logika és a halmazelmélet ismert kapcsolata alapján az eseményeket halmazokkal modellezhetjük.

Ha egy kísérletben A és B halmazok eseményeket modelleznek, akkor $A \cup B$ azt fogja jelenteni, hogy az A és B közül legalább az egyik bekövetkezik. Erről egyértelműen eldönthető a kísérlet elvégzése után, hogy bekövetkezett-e, ezért ez is eseményt modellez. Másrészt, ha A esemény, akkor az A ellenkezője is az. Jelöljük ezt $\overline{A}$-val. Az $A \cup \overline{A}$ biztosan bekövetkezik, ezért ezt *biztos eseménynek* nevezzük és Ω-val jelöljük. Ebből látható, hogy $\overline{A}$ az A-nak Ω-ra vonatkozó komplementere, továbbá minden esemény az Ω egy részhalmaza. A nem megfigyelhető események – vagyis amelyekről a kísérlet elvégzése után nem állapítható meg egyértelműen, hogy bekövetkezett-e – szintén részhalmazai az Ω-nak, de ezekkel a továbbiakban nem foglalkozunk. Az adott kísérletre vonatkozó események rendszerét jelöljük $\mathcal{F}$-fel, mely tehát az Ω hatványhalmazának egy részhalmaza.

Például amikor egy dobókockával játszunk, az egyes, kettes, hármas, négyes, ötös vagy a hatos oldal lehet felül. A nekik megfelelő halmazok legyenek a következők: $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$. De más események is vannak. Például hogy páros szám lesz felül: $\{2, 4, 6\} = \{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}$, vagy nem egyes lesz felül: $\overline{\{1\}} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Itt a biztos esemény $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Az Ω felírásánál azt is figyelembe kell venni, hogy egy kísérletet mikor tekintünk sikeresnek, illetve mikor sikertelen, azaz mikor kell helyette új kísérletet végrehajtani. Az előbbi példában, ha az élére esik a kocka, akkor azt sikertelen kísérletnek tekintjük, hiszen Ω elemei között egy sincs, ami ezt az esetet jelentené. Amennyiben mégis be akarjuk vonni a modellünkbe a kocka élére esését, akkor az Ω felírása módosul például erre: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \text{él}\}$.

A modellalkotás következő lépése valamilyen tapasztalati törvény megfigyelése az eseményekkel kapcsolatosan. Ilyet először *Jacob Bernoulli* (1654–1705) svájci matematikus publikált. Egy kísérletet hajtsunk végre egymás után többször egymástól függetlenül azonos körülmények között. Figyeljünk meg ebben a kísérletsorozatban egy bizonyos eseményt. Ezen esemény bekövetkezéseinek a számát az esemény *gyakoriságának*, míg a bekövetkezések számának és a kísérletek számának arányát az esemény *relatív gyakoriságának* fogjuk nevezni. Például egy dobókockával többször dobva, ábrázoljuk a hatos dobások relatív gyakoriságát a dobások számának függvényében:



Azt látjuk, hogy a hatos dobás relatív gyakorisága a dobások számának növelésével egyre kisebb mértékben ingadozik $\frac{1}{6}$ körül. Más véletlen kimenetelű kísérletek eseményeire is hasonló a tapasztalat:

A kísérletek számának növelésével a figyelt esemény bekövetkezésének relatív gyakorisága egyre kisebb mértékben ingadozik egy konstans körül.

Ezt a konstanst a figyelt esemény *valószínűségének* fogjuk nevezni. A továbbiakban $\mathrm{P}(A)$ jelölje az A esemény valószínűségét. Itt P egy függvény, amely minden eseményhez hozzárendel egy számot. Könnyen látható, hogy minden esemény valószínűsége nemnegatív valós szám, a biztos esemény valószínűsége 1, illetve egyszerre be nem következő események uniójának valószínűsége az események valószínűségeinek összege.

Andrej Nyikolajevics Kolmogorov (1903–1987) az előzőeket kiegészítve még azt is feltételezte, hogy megszámlálhatóan végtelen sok esemény uniója is esemény, továbbá, hogy megszámlálhatóan végtelen sok páronként diszjunkt esemény uniójának valószínűsége, ezen események valószínűségeinek összegével egyenlő. Ezzel egy olyan elméletet kapott, amellyel már matematikailag bizonyíthatóvá válik Bernoulli megfigyelése. Ezt foglaltuk össze az 1.1. definícióban.

1.2. Valószínűségi mező

A következő definíció a véletlen kimenetelű jelenségek matematikai modellje, amit az előző szakaszban leírt Bernoulli-féle tapasztalat alapján konstruáltunk.

1.1. Definíció Kolmogorov-féle axiómák

Legyen Ω egy nem üres halmaz, az $\mathcal{F}$ részhalmaza az Ω hatványhalmazának, továbbá $\mathrm{P}\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy ezekre teljesülnek a következők:
1. axióma. $\Omega \in \mathcal{F}$.
2. axióma. Ha $A \in \mathcal{F}$, akkor $\overline{A} \in \mathcal{F}$, ahol $\overline{A} = \Omega \setminus A$.
3. axióma. Ha $A_i \in \mathcal{F}$ minden $i \in \mathbb{N}$ esetén, akkor

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$

4. axióma. Minden $A \in \mathcal{F}$ esetén $\mathrm{P}(A) \geq 0$.
5. axióma. $\mathrm{P}(\Omega) = 1$.
6. axióma. Ha $A_i \in \mathcal{F}$ $(i = 1, 2, \dots)$ páronként diszjunktak, akkor

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_i).$$

Ekkor $\mathcal{F}$-et *σ-algebrának* (ejtsd: szigma-algebra), elemeit *eseményeknek*, Ω-t *biztos eseménynek*, a P függvényt *valószínűségnek*, a $\mathrm{P}(A)$ számot az A *esemény valószínűségének*, az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ rendezett hármast *valószínűségi mezőnek*, a 6. axiómát pedig *σ-additivitásnak* nevezzük.

1.2. Definíció

Az 1. és 2. axiómák miatt $\emptyset \in \mathcal{F}$, amit a továbbiakban *lehetetlen eseménynek* nevezünk.

1.3. Tétel

Ha $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező, $A_i \in \mathcal{F}$ minden $i \in \mathbb{N}$ esetén és $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}, \quad \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F} \quad \text{és} \quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}.$$

Bizonyítás. Felhasználva az axiómákat és a de Morgan-féle azonosságokat

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \overline{\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i}} = \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}} \in \mathcal{F},$$

másrészt $A_i := \Omega$ $(i > n)$ választással az előző miatt

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$

Végül $A_i := \emptyset$ $(i > n)$ választással

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$

1.4. Definíció

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező és $A, B \in \mathcal{F}$.

(1) Ha $A \subset B$, akkor azt mondjuk, hogy az A *maga után vonja* B-t.

(2) $\overline{A}$-t az A *ellentett eseményének* nevezzük.

(3) Ha $A \cap B = \emptyset$, akkor az A és B eseményeket *egymást kizáró eseményeknek* nevezzük.

$A \cup B$ akkor következik be, ha A és B közül legalább az egyik bekövetkezik. $A \cap B$ akkor következik be, ha A és B egyszerre bekövetkezik. $\overline{A}$ akkor következik be, ha az A nem következik be. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ akkor következik be, ha A bekövetkezik de B nem.

1.5. Tétel

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező, $A_i, A, B \in \mathcal{F}$ $(i \in \mathbb{N})$ és $n \in \mathbb{N}$. Ekkor teljesülnek a következők:

(1) $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$.

(2) (*véges additivitás*) Ha $A_1, \ldots, A_n$ páronként egymást kizáró események, akkor $\mathrm{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \mathrm{P}(A_1) + \cdots + \mathrm{P}(A_n)$.

(3) $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A})$.

(4) $\mathrm{P}(B \setminus A) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$.

(5) $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$.

(6) Ha $A \subset B$, akkor $\mathrm{P}(B \setminus A) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A)$.

(7) (*monotonitás*) Ha $A \subset B$, akkor $\mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(B)$.

(8) $\mathrm{P}(A) \leq 1$.

(9) Ha $A \subset B$ és $\mathrm{P}(B) = 0$, akkor $\mathrm{P}(A) = 0$.

(10) Ha $\mathrm{P}(B) = 1$, akkor $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \cap B)$.

(11) (*σ-szubadditivitás*) $\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_i)$.

(12) (*véges szubadditivitás*) $\mathrm{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \leq \mathrm{P}(A_1) + \cdots + \mathrm{P}(A_n)$.

Bizonyítás. (1) Legyen $A_1 = \Omega$ és $A_n = \emptyset$ minden $n \geq 2$ esetén. Ekkor az A_i $(i = 1, 2, \dots)$ páronként egymást kizáró események, így a σ-additivitásból

$$1 = \mathrm{P}(\Omega) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_i) = 1 + \sum_{i=2}^{\infty} \mathrm{P}(\emptyset) = 1 + \lim_{n\to\infty} n\,\mathrm{P}(\emptyset)$$

következik. Ezért

$$\lim_{n\to\infty} n\,\mathrm{P}(\emptyset) = 0,$$

ami csak úgy lehetséges, ha $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$, hiszen ellenkező esetben az előző határérték ∞ lenne.

(2) Legyen $A_i := \emptyset$ $(i > n)$. Ezek páronként egymást kizáróak, így a σ-additivitás és $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$ miatt

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i).$$

(3) Az A és $\overline{A}$ egymást kizáróak, ezért a véges additivitásból

$$1 = \mathrm{P}(\Omega) = \mathrm{P}(A \cup \overline{A}\,) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(\,\overline{A}\,).$$

(4) A véges additivitás miatt $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(B \setminus A)$.

(5) A véges additivitás miatt $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B \setminus A)$. Így (4)-ből kapjuk az állítást.

(6) $A \subset B$ esetén $A \cap B = A$, így a (4) pontból következik az állítás.

(7) A 4. axiómából és a (6) pontból következik az állítás, ugyanis $A \subset B$ esetén $0 \leq \mathrm{P}(B \setminus A) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A)$ teljesül.

(8) Minden $A \in \mathcal{F}$ esetén $A \subset \Omega$, ezért az 5. axióma és a (7) pont miatt igaz a tétel.

(9) A 4. axióma és (7) miatt $0 \leq \mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(B) = 0$, melyből következik az állítás.

(10) Az eddigiek miatt $0 \leq \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A \setminus B) \leq \mathrm{P}(\,\overline{B}\,) = 0$, melyből következik az állítás.

(11) Legyen $B_1 := A_1$ és $B_i := A_i \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{i-1})$ $(i = 2, 3, \dots)$. Ekkor $B_1, B_2, \dots$ diszjunkt rendszer, $B_i \subset A_i$ és

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i,$$

melyből

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_i).$$

(12) $A_i := \emptyset$ $(i > n)$ helyettesítéssel (11)-ből következik az állítás.

1.6. Tétel A valószínűség folytonossága

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező és $A_i \in \mathcal{F}$ minden $i \in \mathbb{N}$ esetén.

(1) Ha $A_i \subset A_{i+1}$ minden $i \in \mathbb{N}$ esetén, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right).$$

(2) Ha $A_i \supset A_{i+1}$ minden $i \in \mathbb{N}$ esetén, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n) = \mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right).$$

Bizonyítás. (1) A feltételek miatt

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \setminus A_{i-1})$$

diszjunkt felbontás, ahol $A_0 = \emptyset$. Így a σ-additivitás és a véges additivitás miatt

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_i \setminus A_{i-1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i \setminus A_{i-1}) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \setminus A_{i-1})\right) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n).$$

(2) Mivel $\overline{A_i} \subset \overline{A_{i+1}}$ minden $i \in \mathbb{N}$ esetén és

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i} = \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i},$$

ezért az előző pont miatt

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(\overline{A_n}) = \mathrm{P}\left(\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i}\right).$$

Ebből már következik a tétel.

1.3. Klasszikus valószínűségi mező

Most a legegyszerűbb valószínűségi mezőt mutatjuk be, melyben a biztos esemény egy véges halmaz és minden esemény valószínűsége arányos a számosságával. A gyakorlatban a szerencsejátékok kapcsán merült fel először ennek a vizsgálata.

1.7. Definíció

Legyen Ω egy n elemű halmaz, $\mathcal{F}$ az Ω hatványhalmaza, továbbá

$$\mathrm{P}\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}, \quad \mathrm{P}(A) = \frac{k}{n},$$

ahol k az A elemeinek a száma. Ekkor az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$-t *klasszikus valószínűségi mezőnek* nevezzük.

Az olvasóra bízzuk annak belátását, hogy ez valóban valószínűségi mező. A $\mathrm{P}(A) = \frac{k}{n}$ képletet úgy szokták megfogalmazni, hogy a valószínűség a kedvező esetek száma osztva az összes esetek számával. A kedvező illetve az összes esetek számát legtöbbször kombinatorikai eszközökkel határozhatjuk meg.

A következő tétel bizonyítását is az olvasóra bízzuk.

1.8. Tétel

Legyen Ω nem üres véges halmaz, $\mathcal{F}$ az Ω hatványhalmaza és $\mathrm{P}\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ valószínűség. Ekkor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ pontosan abban az esetben klasszikus valószínűségi mező, ha az egyelemű események valószínűségei megegyeznek.

1.9. Feladat. 52 lapos römi kártyát szétosztunk Antalnak, Bélának, Józsefnek és Imrének véletlenszerűen úgy, hogy mindenkinek 13 lapja legyen. Mi a valószínűsége annak, hogy a treff ászt Antal kapja meg?

Megoldás. Az $\{\omega_1\}$ reprezentálja azt az esetet, amikor a treff ászt Antal kapja meg, hasonlóan $\{\omega_2\}$ azt amikor Béla, $\{\omega_3\}$ azt amikor József, végül $\{\omega_4\}$ azt amikor Imre kapja meg. Legyen $\Omega := \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$. Egyik személyt sem tünteti ki a többihez képest a leosztás, így az $\{\omega_i\}$-k valószínűségei megegyeznek. Tehát ez klasszikus valószínűségi mező. Ekkor a kedvező esetek száma 1, míg az összes esetek száma 4. Vagyis a valószínűség $\frac{1}{4}$.

Másképpen is megoldhatjuk a feladatot. Az Ω legyen a kártya 52 lapjának összes 13-adosztályú ismétlés nélküli kombinációjának halmaza. Ekkor az Antalnak kiosztott lapok bármely kombinációjának megfelel pontosan egy Ω-beli elem. Mivel ezek valószínűségei egyformák a szimmetria viszonyok miatt, ezért klasszikus valószínűségi mezőt kapunk. Azon esetek száma amikor a treff ász a kombinációban van, azaz a kedvező esetek száma, $\binom{51}{12}$. Az Ω elemeinek a száma $\binom{52}{13}$. Így a valószínűség $\binom{51}{12} : \binom{52}{13} = \frac{1}{4}$.

1.10. Feladat. Totóban mi a valószínűsége a 10-es találatnak, ha feltesszük, hogy minden tipp bekövetkezésének a valószínűsége egyforma?

Megoldás. Az Ω legyen az 1, 2, x elemek összes 14-edosztályú ismétléses variációjának halmaza. Ekkor minden tippnek megfelel pontosan egy Ω-beli elem. Ekkor egy klasszikus valószínűségi mezőt kapunk, melyben a 10-es találat $\binom{13}{10} \cdot 2^3 \cdot 3$-féleképpen következhet be. Ugyanis a 10-es találatot az első 13 mérkőzésből kell elérni, ami $\binom{13}{10} \cdot 2^3$-féleképpen lehetséges, és még a 14. mérkőzésre 3-féleképpen tippelhetünk. Az Ω elemeinek a száma, azaz az összes esetek száma 3^{14}. Így a kérdéses valószínűség $\binom{13}{10} \cdot 2^3 \cdot 3 : 3^{14} \approx 0{,}0014$.

1.11. Feladat. Két szabályos kockát feldobunk. Mi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7?

Megoldás. Először azt tisztázzuk, hogy a két kockát meg kell-e különböztetni vagy sem? A válasz meglepő módon az, hogy mindegy. Ugyanis az szubjektív tény, hogy meg tudjuk-e különböztetni a kockákat vagy sem, míg a valószínűség értéke objektív.

Most tekintsük azt az esetet, amikor a két kockát megkülönböztetjük. Ekkor

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(1,1),(1,2),\dots,(1,6),\\ &(2,1),(2,2),\dots,(2,6),\\ &\vdots\\ &(6,1),(6,2),\dots,(6,6)\}.\end{aligned}$$

A kérdéses esemény $A = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$, tehát $\mathrm{P}(A) = \frac{6}{36}$.

Ezután vizsgáljuk azt az esetet, amikor a két kockát nem különböztetjük meg! Ebben az esetben

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(1,1),(1,2),\dots,(1,6),\\ &(2,2),\dots,(2,6),\\ &\vdots\\ &(6,6)\}.\end{aligned}$$

A kérdéses esemény $A = \{(1,6),(2,5),(3,4)\}$, tehát $\mathrm{P}(A) = \frac{3}{21}$. Ez viszont nem egyezik meg az előbbi eredménnyel, miközben azt mondtuk, hogy mindegy melyik esetet taglaljuk, az eredménynek ugyanannak kell lennie. Mi a látszólagos ellentmondás oka? A második esetbeli rossz számítás. Ugyanis az nem alkot klasszikus valószínűségi mezőt, hiszen például $\mathrm{P}\big(\{(1,1)\}\big) \neq \mathrm{P}\big(\{(1,2)\}\big)$. Tehát ebben az esetben a $\frac{3}{21}$ hányados nem egyenlő a $\mathrm{P}(A)$ értékével. Ekkor a következő számítás a helyes: Az első esetre visszavezetve (ami klasszikus valószínűségi mező) könnyen látható, hogy $\mathrm{P}\big(\{(1,6)\}\big) = \mathrm{P}\big(\{(2,5)\}\big) = \mathrm{P}\big(\{(3,4)\}\big) = \frac{2}{36}$, így $\mathrm{P}(A) = 3 \cdot \frac{2}{36}$, ami már megegyezik az előző eredménnyel.

Összefoglalva tehát, mindegy, hogy a kockákat megkülönböztetjük vagy sem, de előbbi esetben klasszikus valószínűségi mezőt kapunk, míg az utóbbiban nem. Ezért célszerűbb a kockák megkülönböztetése.

1.12. Feladat. Ötöslottóban egy szelvénnyel játszva, mi a valószínűsége, hogy kettes találatunk lesz?

Megoldás. Legyen Ω az összes lottóötös halmaza, azaz lexikografikus elrendezésben

$$\Omega := \Big\{\{1,2,3,4,5\},\{1,2,3,4,6\},\dots,\{86,87,88,89,90\}\Big\}.$$

Ekkor Ω elemeinek a száma $\binom{90}{5}$. Fontos kérdés, hogy ez klasszikus valószínűségi mező-e, azaz például az $\{1,2,3,4,5\}$ és az $\{13,25,41,72,86\}$ lottóötösök valószínűségei megegyeznek-e? Gyakran hallott válasz, hogy nem, mivel az első lottóötös „rendezett", míg a második nem, továbbá a tapasztalat azt mutatja, hogy sokkal ritkábban húznak „rendezett" lottóötöst. Nos az valóban igaz, hogy ritkábban húznak „rendezett" lottóötöst, de ez azért van így, mert kevesebb van belőlük. De ettől egy konkrét „rendezett" lottóötösnek az esélye még ugyanakkora, mint egy konkrét „rendezetlené". Hogy ezt megértsük gondoljon egy olyan kockára, melynek a hatos oldala piros, a többi fehér. Ekkor azt tapasztaljuk, hogy nagyobb eséllyel dobunk fehér oldalt, mint pirosat, másrészt viszont a hatos és az egyes dobás valószínűségei megegyeznek, pedig a hatos oldal piros, míg az egyes oldal fehér.

Egy másik magyarázat arra, hogy miért kapunk klasszikus esetet: A számoknak itt csak annyi a jelentősége, hogy az egyes golyókat megkülönböztesse. Viszont a számoknak van egy olyan tulajdonsága, aminek a lottóban nincs szerepe, nevezetesen a rendezettség. Ebből fakadóan tűnik egy lottóötös „rendezettnek" vagy „rendezetlennek".

Most már rátérhetünk a számolásra. Az általunk tippelt öt számból kettőt kell kihúzni, mely $\binom{5}{2}$ módon lehetséges, míg a többi 85-ből hármat, mely $\binom{85}{3}$ módon lehetséges. Így a megoldás

$$\frac{\binom{5}{2}\binom{85}{3}}{\binom{90}{5}} \approx 0{,}0225.$$

Ez azt jelenti, hogy hetenként egy szelvénnyel játszva, hosszú távon átlagosan, kb. 44 hetenként egyszer lesz kettesünk az ötöslottón.

2. fejezet

Feltételes valószínűség és függetlenség

2.1. Feltételes valószínűség

Szabályos kockával dobjunk 10-szer. Tegyük fel például, hogy a következő számokat kapjuk:

$$1, 5, 4, 5, 5, 6, 4, 2, 2, 6.$$

Jelölje A azt az eseményt, hogy maximum hármast dobunk, és B azt, hogy páros számot dobunk. Az A, B és $A \cap B$ események relatív gyakoriságait jelöljük rendre $r(A)$, $r(B)$ és $r(A \cap B)$ módon. Ekkor

$$r(A) = \frac{3}{10},\ r(B) = \frac{6}{10},\ r(A \cap B) = \frac{2}{10}.$$

A valószínűség modellezésének bevezetésénél volt egy feltételünk a dobókocka kísérlet végrehajtásánál. Abban az esetben, amikor élére esik a kocka, a dobást ne vegyük számításba. Most ezt a feltételt tovább bővítjük. Akkor se vegyük számításba a dobást, ha nem páros számot dobunk, azaz nem a B következik be. Így már csak 6 érvényes dobásunk van:

$$\cancel{1}, \cancel{5}, 4, \cancel{5}, \cancel{5}, 6, 4, 2, 2, 6.$$

Ebben a módosított kísérletben az A esemény nem 3-szor, hanem csak kétszer következett be, így a relatív gyakorisága $\frac{2}{6}$. Ezt jelöljük $r(A \mid B)$-vel. Tehát most

$$r(A \mid B) = \frac{2}{6}.$$

Ez a relatív gyakoriság pontosan olyan tulajdonságot fog mutatni, mint az eredeti relatív gyakoriság, azaz sok kísérlet esetén egy bizonyos érték körül fog ingadozni. Ezt az értéket az A esemény B-re vonatkozó feltételes valószínűségének nevezzük, továbbá $\mathrm{P}(A \mid B)$ módon jelöljük.

Hogyan lehet ezt a feltételes valószínűséget kiszámolni az eredeti valószínűségi mezőben? Az $r(A \mid B)$ értéke úgy jött ki, hogy a nevezőben csak a B bekövetkezéseinek a számát, azaz B gyakoriságát írtuk, míg a számlálóba az A-nak azon bekövetkezéseit írtuk, amikor B is bekövetkezett, hiszen a többit töröltük. Így teljesül a következő:

$$r(A \mid B) = \frac{r(A \cap B)}{r(B)}.$$

A modellünkben tehát a feltételes valószínűség a következő módon definiálható:

2.1. Definíció

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező, $A, B \in \mathcal{F}$ és $\mathrm{P}(B) \neq 0$. A

$$\mathrm{P}(A \mid B) := \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

számot, az A *esemény* B-re *vonatkozó feltételes valószínűségének* nevezzük.

A következő tétel definíció alapján közvetlenül bizonyítható.

2.2. Tétel

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ egy valószínűségi mező, $B \in \mathcal{F}$ továbbá $\mathrm{P}(B) \neq 0$. Ekkor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}_B)$ és $(B, \mathcal{F}_B, \mathrm{P}^*_B)$ is valószínűségi mező, ahol

$$\mathrm{P}_B \colon \mathcal{F} \to \mathbb{R},\ \mathrm{P}_B(A) = \mathrm{P}(A \mid B),$$
$$\mathcal{F}_B = \{A \cap B : A \in \mathcal{F}\} \quad \text{és} \quad \mathrm{P}^*_B \colon \mathcal{F}_B \to \mathbb{R},\ \mathrm{P}^*_B(A) = \mathrm{P}(A \mid B).$$

Mivel $(B, \mathcal{F}_B, \mathrm{P}^*_B)$ valószínűségi mező, ezért a feltételes valószínűséget úgy is ki lehet számítani, hogy az Ω eseményteret leszűkítjük a B eseményre. A feltételes valószínűség fogalmát pontosan ezen tulajdonság alapján vezettük be.

Például, ha egy szelvénnyel lottózunk, az első négy számot már kihúzták és mindet eltaláltuk, akkor mi a valószínűsége, hogy az ötödiknek kihúzott számot is eltaláljuk? A feltételes valószínűség használata nélkül gondolkodhatunk a következőképpen: Mivel már négyet kihúztak, ezért a maradék 86-ból kell eltalálni egyet. Így az eredmény $\frac{1}{86}$.

2.3. Tétel

Ha $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező, $A, B, C \in \mathcal{F}$ és $\mathrm{P}(C) \neq 0$, akkor

(1) $\mathrm{P}(A \mid C) \leq 1$,

(2) $\mathrm{P}(A \mid C) = 1$, ha $C \subset A$,

(3) $\mathrm{P}(\overline{A} \mid C) = 1 - \mathrm{P}(A \mid C)$,

(4) $\mathrm{P}(A \cup B \mid C) = \mathrm{P}(A \mid C) + \mathrm{P}(B \mid C) - \mathrm{P}(A \cap B \mid C)$,

(5) $\mathrm{P}(A \setminus B \mid C) = \mathrm{P}(A \mid C) - \mathrm{P}(A \cap B \mid C)$.

Bizonyítás. Az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}_C)$ valószínűségi mező, ezért az 1.5. tétel miatt (1), (3), (4) és (5) teljesül. A (2) állítás abból következik, hogy $C \subset A$ miatt $A \cap C = C$.

A következő tétel szintén a definíció következménye.

2.4. Tétel Szorzattétel

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező, $A, B \in \mathcal{F}$ és $\mathrm{P}(B) \neq 0$. Ekkor

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A \mid B)\, \mathrm{P}(B).$$

2.5. Feladat. Két dobozból az elsőben 3 piros és 4 fekete, a másodikban pedig 4 piros és 5 fekete golyó van. Az első dobozból átteszünk egy golyót a másodikba, majd a másodikból választunk ki egy golyót. Mennyi a valószínűsége, hogy mindkét alkalommal pirosat húzunk?

Megoldás. Jelölje A azt az eseményt, hogy másodikra pirosat húzunk, B pedig azt, hogy elsőre pirosat húzunk. Ekkor a szorzattétel alapján

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A \mid B)\, \mathrm{P}(B) = \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{7}.$$

Az ún. láncszabály a szorzattétel általánosítása.

2.6. Tétel Láncszabály

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező és $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$. Ekkor

$$\mathrm{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathrm{P}(A_1)\, \mathrm{P}(A_2 \mid A_1)\, \mathrm{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdots \mathrm{P}(A_n \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}),$$

feltéve, hogy léteznek ezek a feltételes valószínűségek.

Bizonyítás. A bizonyítandó egyenlőség jobb oldalát írjuk fel a feltételes valószínűség definíciójával:

$$\mathrm{P}(A_1) \frac{\mathrm{P}(A_1 \cap A_2)}{\mathrm{P}(A_1)} \frac{\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{\mathrm{P}(A_1 \cap A_2)} \cdots \frac{\mathrm{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n)}{\mathrm{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})},$$

ami valóban $\mathrm{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n)$.

2.7. Feladat. Egy pakli magyar kártyából 3 kártyát kihúzunk egymásután visszatevés nélkül. Mi a valószínűsége, hogy elsőre ászt, másodikra nem ászt és harmadikra ismét ászt húzunk?

Megoldás. Jelentse rendre A_1, A_2 és A_3, hogy elsőre ászt, másodikra nem ászt és harmadikra ászt húzunk. Ekkor a láncszabály alapján

$$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathrm{P}(A_1)\, \mathrm{P}(A_2 \mid A_1)\, \mathrm{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) = \frac{4}{32} \cdot \frac{28}{31} \cdot \frac{3}{30}.$$

2.8. Definíció

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező. Azt mondjuk, hogy $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{F}$ *teljes eseményrendszer*, ha osztályozása Ω-nak, azaz $B_i \cap B_j = \emptyset$ minden $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$ esetén, továbbá $B_1 \cup \dots \cup B_n = \Omega$. Másképpen fogalmazva, ekkor a $B_1, \dots, B_n$ események közül minden esetben pontosan egy teljesül.

2.9. Tétel Teljes valószínűség tétele

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező, $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{F}$ teljes eseményrendszer, és $\mathrm{P}(B_i) \neq 0$ minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén. Ekkor bármely $A \in \mathcal{F}$ eseményre

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A \mid B_i)\,\mathrm{P}(B_i).$$

Bizonyítás. $B_1 \cup \dots \cup B_n = \Omega$, ezért

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i).$$

Mivel a B_i események páronként egymást kizáróak, ezért az $A \cap B_i$ események is azok, így alkalmazhatjuk a véges additivitást:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A \mid B_i)\,\mathrm{P}(B_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A \cap B_i) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)\right) = \mathrm{P}(A).$$

2.10. Tétel Bayes tétele

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező, $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{F}$ teljes eseményrendszer, és $\mathrm{P}(B_i) \neq 0$ minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén. Ha $A \in \mathcal{F}$ és $\mathrm{P}(A) \neq 0$, akkor bármely $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén

$$\mathrm{P}(B_i \mid A) = \frac{\mathrm{P}(A \mid B_i)\,\mathrm{P}(B_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A \mid B_k)\,\mathrm{P}(B_k)}.$$

Bizonyítás. A teljes valószínűség tétele szerint az egyenlőség jobb oldala $\frac{\mathrm{P}(A \cap B_i)}{\mathrm{P}(A)}$-val egyenlő, melyből következik az állítás.

2.11. *Megjegyzés.* Ha valamely A eseményt mint okozatot tekintjük, amit a $B_1, \dots, B_n$ okok válthatnak ki, akkor ismerve az okok valószínűségeit és hatásukat az okozat bekövetkezésére, azaz a $\mathrm{P}(A \mid B_i)$ értékeket tudva, a teljes valószínűség tétele értelmében az okozat valószínűsége meghatározható. Másfelől, ha az A okozat már bekövetkezett, akkor Bayes tételével következtethetünk arra, hogy egy kiválasztott ok milyen valószínűséggel szerepelt az A létrejöttében. Ilyen értelemben Bayes tétele megfordítása a teljes valószínűség tételének.

2.12. *Megjegyzés.* Ha a $B_1, \ldots, B_n$ eseményrendszerre teljesül, hogy páronként egymást kizáróak, és uniójuk valószínűsége 1, akkor azt *tágabb értelemben vett teljes eseményrendszernek* nevezzük. A teljes valószínűség tétele és Bayes tétele ilyen eseményrendszerekre is igaz. Másrészt, ha a tágabb értelemben vett teljes eseményrendszer megszámlálhatóan végtelen sok eseményből áll, ez a két tétel akkor is teljesül.

2.13. Feladat. Szindbád tíz háremhölgy közül feleséget választhat oly módon, hogy az előtte elvonuló, véletlenszerűen sorrendbe állított hölgyek közül az első ötöt el kell engednie, de az utána következők közül ki kell választania a legelsőt, aki az első öt hölgytől szebb. Mi a valószínűsége annak, hogy Szindbád a legszebb hölgyet tudja kiválasztani? Feltesszük, hogy szigorú sorrendet tudunk megállapítani a hölgyek szépségét illetően, továbbá ha a legszebb hölgy az első öt között volt, akkor Szindbád nem választhat ki senkit.

Megoldás. Jelentse A azt az eseményt, hogy Szindbád a legszebb háremhölgyet választja ki, B_i pedig azt, hogy i-ediknek érkezik a legszebb hölgy. Ekkor a teljes valószínűség tétele szerint

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i=1}^{10} \mathrm{P}(A \mid B_i)\,\mathrm{P}(B_i) = \sum_{i=6}^{10} \mathrm{P}(A \mid B_i)\,\mathrm{P}(B_i),$$

hiszen, ha $i \leq 5$, akkor $\mathrm{P}(A \mid B_i) = 0$. Válasszuk ki az első $i-1$ hölgy közül a legszebbet. Ha ő az első ötben volt, akkor bekövetkezik A, ellenkező esetben nem. Mivel $i-1$ hölgy között $(i-1)$-féleképpen helyezkedhet el, és ebből az előzőek értelmében csak 5 a kedvező, ezért $\mathrm{P}(A \mid B_i) = \frac{5}{i-1}$. Másrészt $\mathrm{P}(B_i) = 0{,}1$, így

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i=6}^{10} \frac{5}{i-1} \cdot 0{,}1 = 0{,}5 \sum_{i=5}^{9} \frac{1}{i} \approx 0{,}373.$$

2.14. Feladat. Egy üzemben három gép működik. Az első a termelés 25 %-át adja, és 5 %-os selejttel dolgozik. A második 35 %-ot termel 4 %-os selejttel, végül a harmadik 40 %-ot ad 2 %-os selejttel. A termékek közül kiválasztunk egyet véletlenszerűen, és azt tapasztaljuk, hogy az selejtes. Mi a valószínűsége annak, hogy az első gép gyártotta?

Megoldás. Jelentse A azt az eseményt, hogy selejtes terméket választottunk, B_i pedig azt, hogy az i-edik gép gyártotta. Ekkor Bayes tétele értelmében

$$\mathrm{P}(B_1 \mid A) = \frac{\mathrm{P}(A \mid B_1)\,\mathrm{P}(B_1)}{\sum_{k=1}^{3} \mathrm{P}(A \mid B_k)\,\mathrm{P}(B_k)} = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}05}{0{,}25 \cdot 0{,}05 + 0{,}35 \cdot 0{,}04 + 0{,}4 \cdot 0{,}02} \approx 0{,}362.$$

2.2. Események függetlensége

Jelentse A azt, hogy dobókockával elsőre hatost, illetve B azt, hogy másodikra hatost dobunk, azaz $A := \{(6,1), (6,2), \ldots, (6,6)\}$ és $B := \{(1,6), (2,6), \ldots, (6,6)\}$. Ekkor

$P(A) = P(A \mid B) = \frac{1}{6}$, vagyis A-nak a valószínűsége, függetlenül attól, hogy a B feltétellel vizsgáljuk vagy anélkül, mindig $\frac{1}{6}$.

A továbbiakban, ha $P(A) = P(A \mid B)$ teljesül, akkor azt mondjuk, hogy A független B-től. Könnyű ellenőrizni, hogy B is független A-tól, hiszen $P(B) = \frac{6}{36}$ és $P(B \mid A) = \frac{1}{6}$, tehát megegyeznek. A függetlenségnek ez a szimmetria tulajdonsága általánosan is igaz, azaz A pontosan akkor független B-től, ha B független A-tól.

Vegyük észre, hogy $P(A)\,P(B) \neq 0$ esetén a függetlenség fogalma ekvivalens azzal, hogy $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$. Ez a képlet akkor is alkalmazható, ha $P(A)\,P(B) = 0$, másrészt a szimmetria azonnal látható belőle. Ezért a továbbiakban ezt fogadjuk el a függetlenség definíciójának.

2.15. Definíció

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező és $A, B \in \mathcal{F}$. Azt mondjuk, hogy az A és B események *függetlenek*, ha $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$.

2.16. Következmény

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező, $A, B \in \mathcal{F}$ és $P(B) \neq 0$. Az A és B pontosan akkor függetlenek, ha $P(A \mid B) = P(A)$.

2.17. Feladat. Antal és Béla céltáblára lőnek. Antal 0,8 valószínűséggel találja el a céltáblát, Béla pedig 0,5-del. A találatok egymástól függetlenek. Ha Antal és Béla egy-egy lövést adnak le, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy legalább az egyikőjük talál?

Megoldás. Az A esemény jelentse azt, hogy Antal lövése talál, illetve B azt, hogy Béla lövése talál. Ekkor $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A)\,P(B) = 0{,}9$.

2.18. Feladat. Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező és $A, B, C \in \mathcal{F}$. Bizonyítsuk be, hogy ha A és B egymást kizáró események, A és C függetlenek, továbbá B és C is függetlenek, akkor $A \cap B$ és C függetlenek, illetve $A \cup B$ és C is függetlenek!

Megoldás. (1) $P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B)\,P(C) = 0$, mert $A \cap B = \emptyset$.

(2) $P\big((A \cup B) \cap C\big) = P((A \cap C) \cup (B \cap C)) = P(A \cap C) + P(B \cap C) = P(A)\,P(C) + P(B)\,P(C) = \big(P(A) + P(B)\big)\,P(C) = P(A \cup B)\,P(C)$.

2.19. Definíció

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező. Az $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ eseményeket *függetleneknek* nevezzük, ha $\{1, \ldots, n\}$ bármely nem üres G részhalmazára

$$P\Big(\bigcap_{i \in G} A_i\Big) = \prod_{i \in G} P(A_i) \tag{2.1}$$

teljesül. Egy végtelen eseményrendszer elemei függetlenek, ha bármely véges részrendszere független.

2.20. Feladat. Húzzunk egy lapot a 32 lapos magyar kártyából. Legyen A az az esemény, hogy pirosat vagy zöldet húzunk, B az, hogy pirosat vagy tököt, illetve C az, hogy számozott lapot húzunk. Mutassuk meg, hogy A, B, C függetlenek!

Megoldás. Ekkor $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(C) = \frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A \cap C) = \mathrm{P}(B \cap C) = \frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{8}$, amiből következik, hogy A, B, C függetlenek.

2.21. Feladat. Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező és $A, B, C \in \mathcal{F}$ független események. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az $A \cap B$ és C, illetve $A \cup B$ és C is függetlenek!

Megoldás. (1) $\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)\,\mathrm{P}(C) = \mathrm{P}(A \cap B)\,\mathrm{P}(C)$.

(2) $\mathrm{P}\big((A \cup B) \cap C\big) = \mathrm{P}\big((A \cap C) \cup (B \cap C)\big) = \mathrm{P}(A \cap C) + \mathrm{P}(B \cap C) - \mathrm{P}(A \cap \cap B \cap C) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(C) + \mathrm{P}(B)\,\mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(A \cap B)\,\mathrm{P}(C) = \big(\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap \cap B)\big)\,\mathrm{P}(C) = \mathrm{P}(A \cup B)\,\mathrm{P}(C)$.

2.22. Tétel

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező. Ha az $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ események függetlenek, akkor az

$$A_1, \ldots, A_{k-1}, \overline{A_k}, A_{k+1}, \ldots, A_n$$

események is függetlenek minden $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén.

Bizonyítás. Elég $k = 1$-re bizonyítani az indexelés önkényessége miatt. Legyen $G \subset \subset \{1,2, \ldots, n\}$. Ha $1 \notin G$, akkor (2.1) közvetlenül az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események függetlenségéből következik. Ha $1 \in G$, legyen $G := \{1, i_2, i_3, \ldots, i_m\}$, ahol $m \leq n$ pozitív egész szám és $2 \leq i_2 < i_3 < \cdots < i_m \leq n$. Ekkor az 1.5. tétel (4) pontja miatt

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(\overline{A_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_m}) = \\
&= \mathrm{P}(A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_m}) - \mathrm{P}(A_1 \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_m}) = \\
&= \mathrm{P}(A_{i_2}) \cdots \mathrm{P}(A_{i_m}) - \mathrm{P}(A_1)\,\mathrm{P}(A_{i_2}) \cdots \mathrm{P}(A_{i_m}) = \\
&= \big(1 - \mathrm{P}(A_1)\big)\,\mathrm{P}(A_{i_2}) \cdots \mathrm{P}(A_{i_m}) = \mathrm{P}(\overline{A_1})\,\mathrm{P}(A_{i_2}) \cdots \mathrm{P}(A_{i_m}),
\end{aligned}$$

amiből következik a tétel.

2.23. *Megjegyzés.* Ha egy eseményrendszer elemei függetlenek, akkor bármely két eleme is független egymástól, vagyis az eseményrendszer elemei *páronként függetlenek*. Fordítva nem igaz, a páronkénti függetlenségből nem következik a függetlenség. Például a 32 lapos magyar kártyából húzzunk ki egy lapot. Jelentse A azt, hogy makkot vagy pirosat húztunk, B azt, hogy makkot vagy tököt, illetve C azt, hogy makkot vagy zöldet húztunk. Ekkor $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(C) = \frac{1}{2}$ és $\mathrm{P}(A \cap B) = = \mathrm{P}(A \cap C) = \mathrm{P}(B \cap C) = \frac{1}{4}$ miatt az A, B, C események páronként függetlenek, de $\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4}$ miatt $\mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)\,\mathrm{P}(C) \neq \mathrm{P}(A \cap B \cap C)$, így nem függetlenek.

2.3. Független kísérletek valószínűségi mezője

Több kísérlet egymástól független elvégzését, azaz több különböző valószínűségi mező eseményeinek függetlenségét, a (2.1) képlettel nem definiálhatjuk. Ezért bevezetjük a független kísérletek valószínűségi mezőjének a fogalmát, mely az egész kísérletsorozatot egy mezőben írja le.

2.24. Definíció

Legyen Ω nem üres halmaz és H részhalmaza az Ω hatványhalmazának. Ekkor $\sigma(H)$ alatt a H *által generált σ-algebrát* értjük, azaz a H-t tartalmazó összes olyan σ-algebra metszetét, amely részhalmaza az Ω hatványhalmazának.

A definíció korrekt, hiszen könnyen látható, hogy σ-algebrák metszete is σ-algebra.

2.25. Definíció

Legyenek az $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathrm{P}_i)$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ valószínűségi mezők,

$$\begin{aligned}\Omega &:= \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n,\\ \mathcal{F} &:= \sigma\Big(\{A_1 \times \cdots \times A_n : A_i \in \mathcal{F}_i, i = 1, 2, \ldots, n\}\Big),\end{aligned}$$

továbbá $\mathrm{P}\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ olyan valószínűség, melyre

$$\mathrm{P}(A_1 \times \cdots \times A_n) = \mathrm{P}_1(A_1) \cdots \mathrm{P}_n(A_n)$$

teljesül minden $A_i \in \mathcal{F}_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ esetén. Ekkor az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$-t *független kísérletek valószínűségi mezőjének*, továbbá az $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathrm{P}_i)$-ket $(i = 1, 2, \ldots, n)$ az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ *kísérleteinek* nevezzük. Ha ezek a kísérletek mind ugyanazok, akkor az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$-t *Bernoulli-féle valószínűségi mezőnek* nevezzük.

Az ún. Caratheodory-féle kiterjesztési tétel szerint az előző definícióban meghatározott valószínűség egyértelműen létezik.

A k-adik kísérlet eredménye legyen $A_k \in \mathcal{F}_k$, ami azt jelenti, hogy bekövetkezett az

$$A_k^* := \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{k-1} \times A_k \times \Omega_{k+1} \times \cdots \times \Omega_n \in \mathcal{F}$$

esemény. Így $\mathrm{P}(A_k^*) = \mathrm{P}_k(A_k)$ és $A_1^* \cap \cdots \cap A_n^* = A_1 \times \cdots \times A_n$ teljesül minden $A_1 \in \mathcal{F}_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}_n$ esetén. Ebből látható, hogy ekkor

$$\mathrm{P}(A_1^* \cap \cdots \cap A_n^*) = \mathrm{P}(A_1^*) \cdots \mathrm{P}(A_n^*)$$

teljesül, ami a (2.1) képletnek felel meg, azaz tényleg jogos a függetlenség jelző.

2.4. Geometriai valószínűségi mező

A középiskolában tanult hosszúság, terület illetve térfogat fogalmak nem alkalmasak valószínűségi mező létrehozására, mert a Jordan-mérhető halmazok rendszere nem σ-

algebra és a Jordan-mérték nem σ-additív. Ezért először a Jordan-mérhető halmazok rendszerét kiterjesztjük úgy, hogy az már σ-algebra legyen.

2.26. Definíció

Az $\mathbb{R}^k$ ($k \in \mathbb{N}$) nyílt halmazaiból álló halmazrendszer által generált σ-algebrát *k-dimenziós Borel-mérhető halmazok rendszerének* nevezzük.

Bizonyítható, hogy minden Jordan-mérhető halmaz egyúttal Borel-mérhető is, viszont van olyan Borel-mérhető halmaz, amely nem Jordan-mérhető. A következőkben minden Borel-mérhető halmazhoz rendelni fogunk egy számot, amelyet majd ezen halmaz Lebesgue-mértékének fogunk nevezni. Ennek érdekében először csak a legegyszerűbb típusú halmazhoz rendeljünk mértéket, a téglákhoz.

2.27. Definíció

Az $I_1 \times \cdots \times I_k$ alakú halmazokat *k-dimenziós tégláknak* nevezzük, ahol $I_1, \ldots, I_k$ korlátos intervallumok. Egy ilyen $I_1 \times \cdots \times I_k$ tégla mértékén azt a $h_1 \cdots h_k$ szorzatot értjük, melyben h_j az I_j korlátos intervallum hosszát jelenti.

Ezután egy tetszőleges Borel-mérhető halmazhoz hasonlóan fogunk számot rendelni, mint ahogyan azt a Jordan-féle külső mértéknél tettük. A különbség annyi lesz, hogy itt a lefedéseket nem csak véges, hanem megszámlálhatóan végtelen sok alakzat segítségével is megtehetjük. Praktikussági okokból ezek a lefedő alakzatok most csak téglák lehetnek.

2.28. Definíció

Legyen $A \subset \mathbb{R}^k$ ($k \in \mathbb{N}$) Borel-mérhető, és tekintsük annak a halmaznak az infimumát, melynek elemei az A-t lefedő megszámlálhatóan sok k-dimenziós tégla mértékeinek összegeként állnak elő. Ezt az infimum értéket az A *Lebesgue-mértékének* nevezzük és $\lambda^k(A)$ módon jelöljük.

Bizonyítható, hogy egy Jordan-mérhető halmaz Lebesgue-mértéke megegyezik a Jordan-mértékével, továbbá, hogy a Borel-halmazokon értelmezett Lebesgue-mérték σ-additív. Így tehát, a Lebesgue-mérték alkalmas arra, hogy valószínűségi mezőt konstruáljunk.

2.29. Definíció

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ olyan Borel-mérhető halmaz, melynek Lebesgue-mértéke pozitív valós szám. Az $\mathcal{F}$ legyen az Ω összes Borel-mérhető részhalmazainak a halmaza, továbbá

$$\mathrm{P}\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}, \quad \mathrm{P}(A) = \frac{\lambda^k(A)}{\lambda^k(\Omega)}.$$

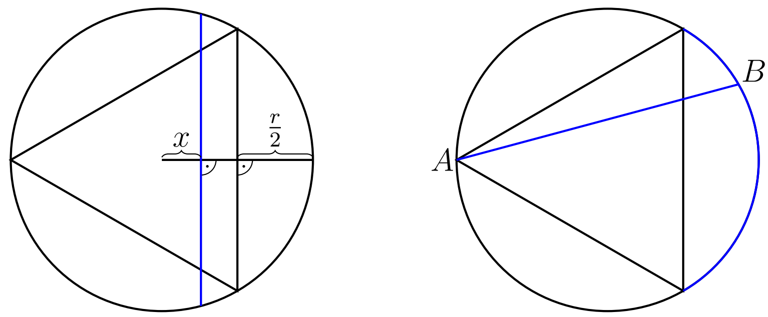
Ekkor belátható, hogy az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ valószínűségi mezőt alkot, melyet a továbbiakban *k-dimenziós geometriai valószínűségi mezőnek* nevezünk.

Definíció szerint geometriai valószínűségi mezőben az esemény valószínűsége arányos a Lebesgue-mértékével. A kísérlet itt az Ω ponthalmaz egy pontjának véletlenszerű kiválasztását jelenti, amelyeknek a valószínűsége nulla, hiszen a pont Lebesgue-mértéke nulla. Ez is mutatja, hogy nem csak a lehetetlen esemény valószínűsége lehet nulla.

2.30. Feladat (Bertrand-féle paradoxon)**.** Egy körnek jelöljük ki véletlenszerűen egy húrját. Mi a valószínűsége, hogy a húr hosszabb lesz, mint a körbe írt szabályos háromszög oldala?

Megoldás. Az r sugarú kör középpontjának és a húrnak a távolsága egyértelműen meghatározza a húr hosszát. Ha ez kisebb mint $\frac{r}{2}$, akkor a húr hosszabb lesz a háromszög oldalánál. Ezért $(r : 2) : r = \frac{1}{2}$ a valószínűség. (Lásd a bal oldali ábrát.)

Másképpen is megoldhatjuk a feladatot: Rögzítsük a húr A végpontját, a B végpontot pedig véletlenszerűen válasszuk ki a körön. A kör harmadán AB nagyobb a háromszög oldalánál. Ebből következik, hogy $\frac{1}{3}$ a valószínűség. (Lásd a jobb oldali ábrát.)



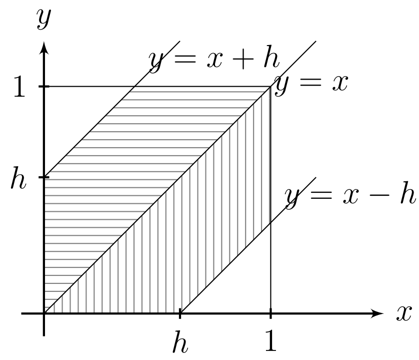
A két megoldás végeredménye nem egyezik meg. Ennek az a magyarázata, hogy a feladatban nem volt arról szó, hogy a húr kiválasztása milyen módon történjen. A kétféle végeredmény azt mutatja, hogy más-más kiválasztási eljárás során más és más lehet a valószínűség is.

2.31. Tétel

Két egydimenziós geometriai valószínűségi mezőből képzett független kísérletek valószínűségi mezője kétdimenziós geometriai valószínűségi mező.

2.32. Feladat. Egységnyi hosszúságú szakaszon véletlenszerűen kiválasztunk egymástól függetlenül két pontot. Mi a valószínűsége, hogy a két pont távolsága kisebb egy adott $h < 1$ hosszúságú szakasznál?

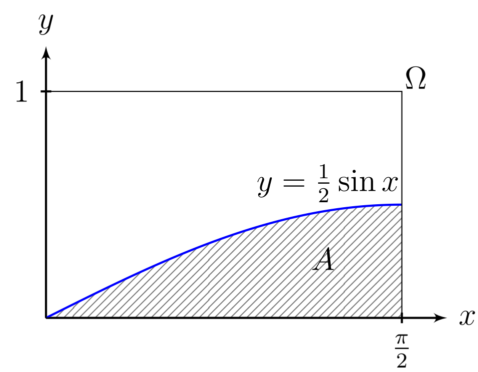
Megoldás. Tekintsük az egyik végpontját az egységnyi hosszúságú szakasznak. A választott P_1 illetve P_2 pontoknak ettől a végponttól való távolsága legyen x illetve y. Ekkor $x, y \in [0, 1]$ teljesül. Feltételezzük, hogy egyetlen pont kiválasztása esetén geometriai valószínűségi mezőről van szó, így a két kísérlet a 2.31. tétel értelmében, egyszerre is leírható egy kétdimenziós geometriai valószínűségi mezőben, ahol $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$.



Kérdés a $B = \{(x, y) \in \Omega : |y - x| < h\}$ esemény valószínűsége. Az ábrán láthatjuk az Ω-t, melyben a satírozott rész jelöli a B halmazt. Felírva a B és az Ω területeinek a hányadosát, azt kapjuk, hogy $\mathrm{P}(B) = 2h - h^2$.

2.33. Feladat (Buffon-féle tűprobléma)**.** Egy vízszintes síklapon párhuzamos egyeneseket húzunk egymástól 2 egységnyi távolságokra. Mi a valószínűsége, hogy egy egységnyi hosszúságú tűt ráejtve a síkra, az elmetszi valamelyik egyenest?

Megoldás. Legyen y a tű középpontjának a távolsága a hozzá legközelebb eső egyenestől, x pedig a tű és az egyenes által bezárt szög mértéke radiánban. Így $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ és $y \in [0, 1]$. Az előző feladathoz hasonlóan x és y kiválasztása egy kétdimenziós geometriai valószínűségi mezőben is leírható, ahol $\Omega := \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 1]$. Mivel x szögnél pontosan $y \leq \frac{1}{2} \sin x$ teljesülése esetén metszi az egyenest a tű, ezért a kérdés az $A := \{(x, y) \in \Omega : y \leq \frac{1}{2} \sin x\}$ esemény valószínűsége. Az ábrán láthatjuk az eseményteret, melyben a satírozott rész jelöli az A halmazt.



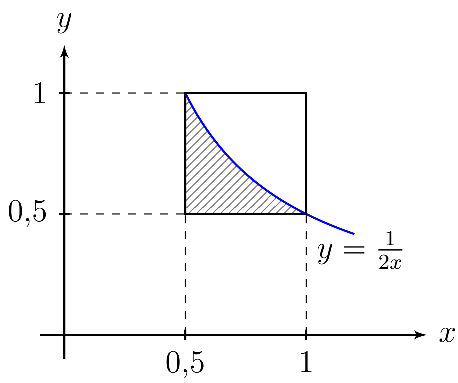
Az Ω területe $\frac{\pi}{2}$, az A területe pedig

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2},$$

ezért $\mathrm{P}(A) = \frac{1}{\pi}$.

2.34. Feladat. Egy szakaszon válasszunk ki egy pontot. A kapott két szakasz közül a hosszabbikon ismét válasszunk ki egy pontot. Adjunk meg egy olyan geometriai valószínűségi mezőt, mely a két kiválasztást egyszerre írja le. Mi a valószínűsége, hogy a kapott három szakaszból háromszög alkotható?

Megoldás. Legyen a szakasz egységnyi hosszúságú. Az első pont kiválasztása után kapott szakaszok közül a hosszabbik hosszát jelöljük x-szel. Ebből a szakaszból a következő pont kiválasztásával ismét két szakaszt kapunk. Célszerűnek tűnik ezek közül megint a hosszabbiknak a hosszát eljelölni például y-nal. De ebben az esetben nem kaphatunk geometriai valószínűségi mezőt, mert y hossza nem független x-től. Így nem alkalmazhatjuk a 2.32. feladat megoldásának a gondolatmenetét. A helyes megoldásban az előbbi y-nal jelölt szakaszhosszt úgy kellene eljelölni, hogy a paraméter már független legyen x-től. Például ilyen lehetőség, hogy y ne magát a szakaszhosszt jelentse, hanem a szakaszhossz és x arányát. Vagyis a másodiknak választott hosszabb szakasz hossza legyen yx. Így már $x, y \in [0{,}5; 1]$. Ebből a kérdéses geometriai valószínűségi mezőben $\Omega = [0{,}5; 1] \times [0{,}5; 1]$.



Ebben az

$$A = \{(x, y) \in \Omega : (1 - x) + (x - yx) > yx\} = \left\{(x, y) \in \Omega : y < \frac{1}{2x}\right\}$$

esemény valószínűségét kell meghatározni, melyet a satírozott rész jelöl. Az ábra alapján A területe

$$\int_{0{,}5}^{1} \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x - 0{,}25 = 0{,}5[\ln x]_{0{,}5}^{1} - 0{,}25 = 0{,}5 \ln 2 - 0{,}25,$$

továbbá Ω területe 0,25. Így $\mathrm{P}(A) = 2 \ln 2 - 1 \approx 0{,}386$.

3. fejezet

Valószínűségi változó

Egy játékban 10 forintot nyerünk, ha egy pénzérme a fej oldalára esik, ellenkező esetben pedig 5 forintot veszítünk. Ebben a kísérletben a biztos esemény $\Omega = \{\text{fej}, \text{írás}\}$. Az előbbi játékszabály leírható egy olyan függvénnyel, amely a fejhez 10-et rendel, míg az íráshoz -5-öt. A továbbiakban azokat a függvényeket, melyek az Ω elemeihez valós számokat rendelnek – bizonyos feltétellel –, valószínűségi változónak fogunk nevezni. A definíció előtt vezessük be a következő jelöléseket:

3.1. Jelölés

Legyen Ω nem üres halmaz, $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ és

$$\{\xi = x\} := \{\omega : \omega \in \Omega, \xi(\omega) = x\}.$$

Hasonlóan értelmezzük a $\{\xi < x\}$, $\{\xi > x\}$, $\{\xi = \eta\}$, $\{\xi < \eta\}$ stb. halmazokat is, ahol $\eta\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Ha $\{\xi = x\}$ $(x \in \mathbb{R})$ esemény az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ valószínűségi mezőben, akkor annak valószínűségét $\mathrm{P}(\{\xi = x\})$ helyett $\mathrm{P}(\xi = x)$-szel jelöljük.[1] Hasonlóan járunk el a többi előbb említett halmaz valószínűségeinek jelöléseinél is. A ξ függvény értékkészletét R_ξ-vel fogjuk jelölni.

3.2. Definíció

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező és $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Ha $\{\xi < x\} \in \mathcal{F}$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, akkor ξ-t *valószínűségi változónak* nevezzük.

A továbbiakban, ha két vagy több valószínűségi változóról beszélünk, akkor azokat ugyanabban a valószínűségi mezőben értelmezzük.

3.3. Tétel

Legyenek ξ és η valószínűségi változók. Ekkor a $\{\xi \leq x\}$, $\{\xi = x\}$, $\{\xi > x\}$, $\{x < \xi < y\}$ és $\{\xi < \eta\}$ halmazok események minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén.

[1] A ξ és η görög betűk kiejtése: *kszí* illetve *éta*.

Bizonyítás. A valószínűségi változó definíciója miatt $\{\xi < x\} \in \mathcal{F}$. Ebből

$$\{\xi \leq x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{\xi < x + \frac{1}{n}\right\} \in \mathcal{F}.$$

Így

$$\{\xi = x\} = \overline{\{\xi < x\}} \cap \{\xi \leq x\} \in \mathcal{F}, \quad \{\xi > x\} = \overline{\{\xi \leq x\}} \in \mathcal{F},$$

továbbá

$$\{x < \xi < y\} = \{\xi > x\} \cap \{\xi < y\} \in \mathcal{F}.$$

A $\{\xi < \eta\} \in \mathcal{F}$ kimutatásához tekintsünk egy olyan $\langle r_n \rangle$ számsorozatot, melynek az értékkészlete a racionális számok halmaza. Ilyen sorozat létezik, mert a racionális számok halmazának számossága megszámlálhatóan végtelen. A racionális számok sűrűn helyezkednek el a számegyenesen, vagyis $\omega \in \{\xi < \eta\}$ esetén létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, melyre $\xi(\omega) < r_{n_0} < \eta(\omega)$ teljesül. Így

$$\omega \in \{\xi < r_{n_0}\} \cap \{\eta > r_{n_0}\} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big(\{\xi < r_n\} \cap \{\eta > r_n\}\Big),$$

melyből

$$\{\xi < \eta\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big(\{\xi < r_n\} \cap \{\eta > r_n\}\Big) \in \mathcal{F}.$$

3.4. Tétel

Ha ξ és η valószínűségi változók és $c \in \mathbb{R}$, akkor a következő függvények is valószínűségi változók: $\xi + c$; $c\xi$; $|\xi|$; ξ^2; $\frac{1}{\xi}$, ha $\{\xi = 0\} = \emptyset$; $\xi - \eta$; $\xi + \eta$; $\xi\eta$; $\frac{\xi}{\eta}$, ha $\{\eta = 0\} = \emptyset$.

Bizonyítás. Az állítás a 3.3. tétel következménye az alábbiak miatt:

(1) $\{\xi + c < x\} = \{\xi < x - c\} \in \mathcal{F}$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

(2) $\{c\xi < x\} = \begin{cases} \left\{\xi < \frac{x}{c}\right\}, & \text{ha } c > 0, \\ \left\{\xi > \frac{x}{c}\right\}, & \text{ha } c < 0, \\ \Omega, & \text{ha } c = 0 \text{ és } x > 0, \\ \emptyset, & \text{ha } c = 0 \text{ és } x \leq 0. \end{cases}$

(3) $\{|\xi| < x\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{ha } x \leq 0, \\ \{-x < \xi < x\}, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$

(4) $\{\xi^2 < x\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{ha } x \leq 0, \\ \left\{-\sqrt{x} < \xi < \sqrt{x}\right\}, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$

(5) $\left\{\frac{1}{\xi} < x\right\} = \begin{cases} \{\xi < 0\}, & \text{ha } x = 0, \\ \left\{\xi > \frac{1}{x}\right\} \cup \{\xi < 0\}, & \text{ha } x > 0, \\ \left\{\frac{1}{x} < \xi < 0\right\}, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$

(6) $\{\xi - \eta < x\} = \{\xi < \eta + x\} \in \mathcal{F}$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

(7) A (2) és (6) pontokból következően $\xi + \eta = \xi - (-\eta)$ valószínűségi változó.

(8) A korábbiak miatt $\xi\eta = \frac{1}{4}\big((\xi+\eta)^2 - (\xi-\eta)^2\big)$ valószínűségi változó.

(9) Az (5) és (8) pontokból következően $\frac{\xi}{\eta} = \xi \cdot \frac{1}{\eta}$ valószínűségi változó.

3.1. Gyakoriság és relatív gyakoriság

3.5. Definíció

Legyen adott egy $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ n kísérletből álló Bernoulli-féle valószínűségi mező, A egy kísérletének eseménye, továbbá

$$\xi_i\colon \Omega \to \mathbb{R}, \quad \xi_i(\omega) := \begin{cases} 1, & \text{ha } \omega \text{ } i\text{-edik komponense eleme } A\text{-nak}, \\ 0, & \text{ha } \omega \text{ } i\text{-edik komponense eleme } \overline{A}\text{-nak}, \end{cases}$$

minden $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ esetén és $\varrho_n := \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$. Ekkor a ϱ_n illetve a $\frac{\varrho_n}{n}$ valószínűségi változókat[2] az A esemény *gyakoriságának* illetve *relatív gyakoriságának* nevezzük.

3.6. Tétel

Az előző definíció jelöléseit használva $\mathrm{P}(\varrho_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ minden $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ esetén, ahol $p = \mathrm{P}(\xi_1 = 1)$.

Bizonyítás. A $\{\varrho_n = k\}$ esemény azt jelenti, hogy k-szor következett be az A esemény és $(n-k)$-szor az $\overline{A}$. Ez $\binom{n}{k}$-féleképpen valósulhat meg. Másrészt egy ilyen konkrét esetnek a valószínűsége a függetlenség miatt $p^k(1-p)^{n-k}$, mert $p = \mathrm{P}(\xi_i = 1)$ minden $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ esetén. Így a véges additivitásból adódik az állítás.

3.7. *Megjegyzés.* A 3.5. definícióban az a feltétel, hogy ω i-edik komponense eleme A-nak, azt jelenti, hogy a kísérletsorozatban, az i-edik kísérletben az A esemény következett be. Így ϱ_n azt adja meg, hogy n darab kísérletben, hányszor következett be A. Ebből következik, hogy $\frac{\varrho_n}{n}$ a bevezetőben elmondottak szerinti értelemben az A esemény relatív gyakorisága.

Például az A halmaz reprezentálja azt az eseményt, hogy dobókockával 6-ost dobunk. Ekkor $\mathrm{P}(\overline{A}) = \frac{5}{6}$ és $\mathrm{P}(A) = \frac{1}{6}$. Dobjunk háromszor a dobókockával. Az eseménytér $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^3$. Legyen

$$\xi_i\colon \Omega \to \mathbb{R}, \quad \xi_i(\omega) := \begin{cases} 1, & \text{ha } \omega \text{ } i\text{-edik komponense } 6, \\ 0, & \text{ha } \omega \text{ } i\text{-edik komponense nem } 6, \end{cases}$$

[2] Az itt megadott függvények a valószínűségi változó definíciójából és a 3.4. tételből következően valóban valószínűségi változók.

ahol $i \in \{1,2,3\}$. Ez azt jelenti, hogy a ξ_i értéke 1, ha az i-edik dobás a háromból 6-os volt, 0 pedig ha nem. Ekkor a $\varrho_3 := \xi_1+\xi_2+\xi_3$ azt az értéket adja meg, hogy a három dobásból hányszor kaptunk 6-ost. Ez a gyakoriság. Így a $\frac{\varrho_3}{3}$ a relatív gyakoriságot adja meg. A 3.6. tétel szerint annak a valószínűsége, hogy három kísérletből pontosan egyszer dobunk 6-ost

$$\mathrm{P}(\varrho_3 = 1) = \binom{3}{1} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \approx 0{,}347.$$

3.2. Eloszlás

3.8. Definíció

Egy valószínűségi változót *diszkrét valószínűségi változónak* nevezzük, ha az értékkészlete megszámlálható számosságú, azaz véges vagy megszámlálhatóan végtelen.

3.9. Definíció

Ha ξ diszkrét valószínűségi változó, akkor azt a függvényt, amely minden $k \in R_\xi$-hez hozzárendeli a $\mathrm{P}(\xi = k)$ valószínűséget, a ξ *eloszlásának* nevezzük.

3.10. Tétel

Ha ξ diszkrét valószínűségi változó, akkor

$$\sum_{k \in R_\xi} \mathrm{P}(\xi = k) = 1.$$

Másrészt, ha $H \subset \mathbb{R}$ megszámlálható számosságú halmaz és $p\colon H \to [0,1]$ olyan függvény, melyre

$$\sum_{k \in H} p(k) = 1$$

teljesül, akkor létezik olyan ξ diszkrét valószínűségi változó, hogy $R_\xi = H$, és minden $k \in R_\xi$ esetén $\mathrm{P}(\xi = k) = p(k)$ teljesül.

Bizonyítás. (1) $\{\xi = k\}$ $(k \in R_\xi)$ teljes eseményrendszer, ezért

$$\sum_{k \in R_\xi} \mathrm{P}(\xi = k) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{k \in R_\xi} \{\xi = k\}\right) = \mathrm{P}(\Omega) = 1.$$

(2) Legyen $\Omega := H$, $\mathcal{F}$ az Ω hatványhalmaza és

$$\mathrm{P}\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}, \quad \mathrm{P}(A) := \sum_{k \in A} p(k).$$

Ekkor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező, továbbá $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $\xi(k) := k$ teljesíti a tétel állításait.

3.11. *Megjegyzés.* Az eloszlás definíciója korrekt, mert $\{\xi = k\} \in \mathcal{F}$ minden $k \in \mathbb{R}$ esetén a 3.3. tétel szerint, így ezekhez a halmazokhoz lehet valószínűséget rendelni.

A gyakoriság és a relatív gyakoriság diszkrét valószínűségi változók. A 3.6. tételben a gyakoriság eloszlását határoztuk meg, ezért a 3.10. tétel szerint (a binomiális tétellel összhangban)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1.$$

Legyen 15 labda között 9 új és 6 régi, melyekből hármat visszatevés nélkül kiválasztunk. A ξ valószínűségi változó értéke legyen a kihúzott új labdák száma. Ekkor a ξ eloszlásának értékei:

$$\mathrm{P}(\xi = 0) = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{15}{3}} = \frac{20}{455}, \quad \mathrm{P}(\xi = 1) = \frac{9 \cdot \binom{6}{2}}{\binom{15}{3}} = \frac{135}{455},$$

$$\mathrm{P}(\xi = 2) = \frac{\binom{9}{2} \cdot 6}{\binom{15}{3}} = \frac{216}{455}, \quad \mathrm{P}(\xi = 3) = \frac{\binom{9}{3}}{\binom{15}{3}} = \frac{84}{455}.$$

3.3. Eloszlásfüggvény

Mint azt később látni fogjuk, az eloszlás csak diszkrét esetben jellemzi megfelelően a valószínűségi változót. Általános esetben az úgynevezett eloszlásfüggvény ad elegendő információt.

3.12. Definíció

A ξ valószínűségi változó *eloszlásfüggvényének* az

$$F_\xi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F_\xi(x) := \mathrm{P}(\xi < x)$$

függvényt nevezzük.

3.13. *Megjegyzés.* A valószínűségi változó definíciója miatt minden valószínűségi változónak létezik eloszlásfüggvénye. Diszkrét esetben mégis az eloszlást használjuk, mert annak felírása egyszerűbb.

Diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvényének az értékkészlete megszámlálható. Például a 3.11. megjegyzésben definiált diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$F_\xi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0, \\ \frac{20}{455}, & \text{ha } 0 < x \le 1, \\ \frac{155}{455}, & \text{ha } 1 < x \le 2, \\ \frac{371}{455}, & \text{ha } 2 < x \le 3, \\ 1, & \text{ha } x > 3, \end{cases}$$

azaz az F_ξ értékkészlete 5 elemű.

Ha F_ξ értékkészlete megszámlálható, abból még nem következik, hogy ξ diszkrét valószínűségi változó. Másrészt ekkor mindig van olyan η diszkrét valószínűségi változó, melyre $F_\eta = F_\xi$. Például legyen $\Omega := [0,1] \times [0,1]$ és $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ geometriai valószínűségi mező. Ekkor

$$\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}, \quad \xi(x,y) := \begin{cases} 0, & \text{ha } y < 0{,}5, \\ x, & \text{ha } y = 0{,}5, \\ 1, & \text{ha } y > 0{,}5, \end{cases}$$

nem diszkrét valószínűségi változó, másrészt

$$F_\xi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0, \\ 0{,}5, & \text{ha } 0 < x \le 1, \\ 1, & \text{ha } x > 1, \end{cases}$$

vagyis F_ξ értékkészlete megszámlálható. Az állítás másik felének a bizonyítását az olvasóra bízzuk.

3.14. Lemma. *Legyen $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton növekvő függvény, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ és $b \in \mathbb{R}$. Ha valamely $\langle x_n \rangle\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton növekvő (illetve csökkenő) a-hoz konvergáló sorozat esetén teljesül, hogy*

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = b, \tag{3.1}$$

akkor

$$\lim_{x\to a-0} F(x) = b \ (\textit{illetve} \lim_{x\to a+0} F(x) = b).$$

Ha $a = \infty$, akkor $x \to a - 0$ az $x \to \infty$ határátmenetet jelenti, illetve $a = -\infty$ esetben az $x \to a + 0$ az $x \to -\infty$ határátmenetet jelenti.

Bizonyítás. Legyen $\langle y_n \rangle$ tetszőleges a-hoz konvergáló sorozat, melyre $y_n < a$ teljesül minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Ekkor azt kell megmutatni, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} F(y_n) = b$. A (3.1) miatt $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy bármely $n > N(\varepsilon)$ választással

$$|F(x_n) - b| < \varepsilon. \tag{3.2}$$

Másrészt $k_0 := N(\varepsilon) + 1$ jelöléssel az x_{k_0}-hoz létezik $M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy minden $m >$ $> M(\varepsilon)$ esetén $x_{k_0} < y_m$, továbbá ilyen m-ekhez létezik $k_m \in \mathbb{N}$, hogy $y_m < x_{k_m}$. Az $\langle x_n \rangle$ monoton növekedése miatt $k_0 < k_m$. Az eddigiek alapján $x_{k_0} < y_m < x_{k_m}$, vagyis az F monoton növekedése miatt

$$F(x_{k_0}) \le F(y_m) \le F(x_{k_m}). \tag{3.3}$$

Mivel $N(\varepsilon) < k_0 < k_m$, ezért (3.2) miatt $b - \varepsilon < F(x_{k_0})$ és $F(x_{k_m}) < b + \varepsilon$. Így (3.3) alapján minden $m > M(\varepsilon)$ esetén teljesül, hogy $|F(y_m) - b| < \varepsilon$. Ebből következik az állítás.

3.15. Tétel

Legyen ξ valószínűségi változó. Ekkor teljesülnek a következők:

(F1) F_ξ monoton növekvő,

(F2) $\lim\limits_{x\to\infty} F_\xi(x) = 1$,

(F3) $\lim\limits_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0$,

(F4) F_ξ minden pontban balról folytonos.

Bizonyítás. (1) Legyen $x_1 < x_2$. Ha $A_1 = \{\xi < x_1\}$ és $A_2 = \{\xi < x_2\}$, akkor $A_1 \subset A_2$ teljesül, amiből $\mathrm{P}(A_1) \le \mathrm{P}(A_2)$. Mivel $\mathrm{P}(A_1) = \mathrm{P}(\xi < x_1) = F_\xi(x_1)$ és $\mathrm{P}(A_2) = \mathrm{P}(\xi < x_2) = F_\xi(x_2)$, ezért $F_\xi(x_1) \le F_\xi(x_2)$.

(2) Legyen $\langle x_n \rangle$ szigorúan monoton növekvő ∞-be divergáló sorozat és

$$A_n := \{\xi < x_n\},$$

ahol $n \in \mathbb{N}$. Ekkor $A_n \subset A_{n+1}$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, továbbá

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega.$$

Így a valószínűség folytonossága miatt

$$\lim_{n\to\infty} F_\xi(x_n) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n) = 1.$$

Ebből az előző pont és a 3.14. lemma alapján kapjuk az állítást.

(3) Legyen $\langle x_n \rangle$ szigorúan monoton csökkenő $-\infty$-be divergáló sorozat és

$$A_n := \{\xi < x_n\},$$

ahol $n \in \mathbb{N}$. Így $A_n \supset A_{n+1}$ teljesül minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Tegyük fel, hogy

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \ne \emptyset.$$

Ekkor létezik $\omega \in \Omega$, melyre $\omega \in A_n$ teljesül minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Másrészt létezik olyan $m \in \mathbb{N}$, hogy $x_m < \xi(\omega)$, hiszen $\langle x_n \rangle$ sorozat alulról nem korlátos. Így viszont $\omega \notin A_m$, ami ellentmondás. Tehát

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset.$$

Így a valószínűség folytonossága miatt

$$\lim_{n\to\infty} F_\xi(x_n) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n) = 0.$$

Innen a 3.14. lemma alapján következik az állítás.

(4) Legyen $a \in \mathbb{R}$ tetszőleges, az $\langle x_n \rangle$ sorozat szigorúan monoton növekvő, és konvergáljon a-hoz. Az A_n $(n \in \mathbb{N})$ események jelöljék a $\{\xi < x_n\}$ halmazokat, továbbá az A legyen a $\{\xi < a\}$ esemény. Ekkor $A_n \subset A_{n+1}$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, továbbá

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Így a valószínűség folytonossága miatt

$$\lim_{n\to\infty} F_\xi(x_n) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n) = \mathrm{P}(A) = F_\xi(a).$$

Ebből a 3.14. lemma alapján adódik a tétel.

3.16. Tétel

Ha az $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre teljesülnek az (F1)–(F4) tulajdonságok, akkor van olyan valószínűségi változó, melynek eloszlásfüggvénye F.

Bizonyítás. Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ egy geometriai valószínűségi mező, ahol $\Omega = (0, 1)$, továbbá legyen

$$\{F < \omega\} := \{y \in \mathbb{R} : F(y) < \omega\}, \quad \omega \in \Omega.$$

Bebizonyítjuk, hogy ez nem üres és felülről korlátos halmaz minden $\omega \in \Omega$ esetén. Tegyük fel, hogy valamely $\omega \in \Omega$ esetén $\{F < \omega\} = \emptyset$. Ez azt jelenti, hogy minden $y \in \mathbb{R}$ esetén $F(y) \geq \omega$. Ebből

$$\lim_{y\to-\infty} F(y) \geq \omega > 0,$$

ami ellentmond (F3)-nak. Tehát minden $\omega \in \Omega$ esetén $\{F < \omega\} \neq \emptyset$. Most tegyük fel, hogy létezik olyan $\omega \in \Omega$, melyre $\{F < \omega\}$ felülről nem korlátos. Ez azt jelenti, hogy minden $y \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $y_0 \in \{F < \omega\}$, melyre $y < y_0$ teljesül. Ebből F monoton növekedése miatt következik, hogy $F(y) \leq F(y_0) < \omega$, tehát

$$\lim_{y\to\infty} F(y) \leq \omega < 1,$$

ami (F2) miatt ellentmondás. Tehát valóban minden $\omega \in \Omega$ esetén $\{F < \omega\}$ nem üres és felülről korlátos halmaz. Így $\sup\{F < \omega\} \in \mathbb{R}$ minden $\omega \in \Omega$ esetén. Tehát definiálhatunk egy ξ függvényt a következőképpen:

$$\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}, \quad \xi(\omega) := \sup\{F < \omega\}.$$

Megmutatjuk, hogy ekkor ξ valószínűségi változó és $F_\xi = F$. Ennek érdekében belátjuk, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\{\xi < x\} \subset (0, F(x)] \tag{3.4}$$

és

$$(0, F(x)) \subset \{\xi < x\} \tag{3.5}$$

teljesül. Először tegyük fel, hogy $\omega \in \{\xi < x\}$. Ez azt jelenti, hogy $\xi(\omega) < x$, ahol $\omega \in \Omega$. Ebből következően $x \notin \{F < \omega\}$, vagyis $F(x) \geq \omega > 0$, amiből (3.4) teljesül. Tegyük fel, hogy (3.5) nem igaz, vagyis valamely $x \in \mathbb{R}$ esetén $(0, F(x))$ nem részhalmaza $\{\xi < x\}$-nek. Emiatt létezik $\omega \in (0, F(x))$, melyre $\xi(\omega) \geq x$ teljesül. Ekkor (F1) és (F4) miatt

$$F(x) \leq F(\xi(\omega)) = \lim_{y \to \xi(\omega)-0} F(y). \tag{3.6}$$

Legyen $y < \xi(\omega)$ tetszőleges. Ekkor létezik $y_0 \in \{F < \omega\}$ úgy, hogy $y < y_0$. Ezt és az F monotonitását felhasználva $F(y) \leq F(y_0) < \omega$, melyből

$$\lim_{y \to \xi(\omega)-0} F(y) \leq \omega.$$

Ebből és (3.6) miatt kapjuk, hogy $F(x) \leq \omega$, ami ellentmond annak, hogy $\omega \in$ $\in (0, F(x))$. Ezzel (3.5) is bizonyított. A (3.4) és (3.5) relációk miatt

$$\{\xi < x\} = (0, F(x)) \quad \text{vagy} \quad \{\xi < x\} = (0, F(x)]$$

teljesül minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Ebből következik egyrészt, hogy $\{\xi < x\} \in \mathcal{F}$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, vagyis ξ valószínűségi változó, másrészt $F_\xi(x) = \mathrm{P}(\xi < x) = F(x)$.

3.17. Tétel

Ha ξ egy valószínűségi változó és $a < b$ tetszőleges valós számok, akkor

$$\mathrm{P}(a \leq \xi < b) = F_\xi(b) - F_\xi(a).$$

Bizonyítás. $A := \{\xi < a\}$ és $B := \{\xi < b\}$ jelölésekkel $\mathrm{P}(B \setminus A) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A)$ teljesül, ami az állítást bizonyítja.

3.18. Tétel

Ha ξ valószínűségi változó és $a \in \mathbb{R}$, akkor F_ξ-nek létezik a-ban a jobb oldali határértéke, és

$$\lim_{x \to a+0} F_\xi(x) = \mathrm{P}(\xi = a) + F_\xi(a).$$

Bizonyítás. Legyen $\langle x_n \rangle$ egy szigorúan monoton csökkenő a-hoz konvergáló sorozat. Ekkor a 3.17. tétel alapján minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\mathrm{P}(a \leq \xi < x_n) = F_\xi(x_n) - F_\xi(a).$$

Mivel $A_n := \{a \leq \xi < x_n\}$ jelöléssel $A_n \supset A_{n+1}$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, továbbá

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{\xi = a\},$$

ezért a valószínűség folytonossága miatt

$$\lim_{n\to\infty} F_\xi(x_n) = F_\xi(a) + \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n) = F_\xi(a) + \mathrm{P}(\xi = a).$$

Ebből a 3.14. lemma alapján kapjuk a tételt.

3.19. Következmény

A ξ valószínűségi változó F_ξ eloszlásfüggvénye akkor és csak akkor folytonos $a \in \mathbb{R}$-ben, ha $\mathrm{P}(\xi = a) = 0$. Emiatt, ha az F_ξ mindenütt folytonos, akkor $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ esetén

$$F_\xi(b) - F_\xi(a) = \mathrm{P}(a \le \xi < b) = \mathrm{P}(a < \xi < b) = \mathrm{P}(a < \xi \le b) = \mathrm{P}(a \le \xi \le b).$$

3.4. Sűrűségfüggvény

A sűrűség fogalmával már a középiskolában is találkoztunk. Például a tömegsűrűséggel. Ez egy homogén anyag esetében az egységnyi térfogatra jutó tömeget jelenti, ami egyetlen számadat. Inhomogén testnél már nem ilyen egyszerű a helyzet. Ebben az esetben pontról-pontra változhat ez az érték. Így ekkor sűrűségfüggvényről beszélünk. A valószínűségszámításban a sűrűség egy valószínűségi változóra fog vonatkozni, pontosabban arra, hogy mekkora valószínűséggel vesz fel egy egységnyi intervallumbeli értéket. Nem konstans valószínűségi változó esetén, hasonlóan a tömegsűrűséghez, itt is egy függvényt kapunk. Ennek meghatározása érdekében vizsgáljuk meg, hogy ξ mekkora valószínűséggel lehet egy $[x, x+\varepsilon)$ intervallumban, ahol $x \in \mathbb{R}$ és $\varepsilon > 0$:

$$\mathrm{P}(x \le \xi < x + \varepsilon) = F_\xi(x+\varepsilon) - F_\xi(x).$$

Ez az érték az adott ε hosszúságú intervallumra jutó valószínűség. Ebből erre az intervallumra vonatkozó átlagsűrűséget úgy kapjuk meg, ha elosztjuk az intervallum hosszával. Ha ε értékét ezután egyre kisebbre választjuk meg, akkor egyre jobban megközelítjük az x pontra vonatkozó sűrűséget. Tehát a sűrűségfüggvény az x pontban

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{F_\xi(x+\varepsilon) - F_\xi(x)}{\varepsilon} = F'_\xi(x),$$

azaz az eloszlásfüggvény deriváltfüggvénye. Ehhez azonban az kell, hogy F_ξ differenciálható legyen. De ha a sűrűségfüggvényt nem az eloszlásfüggvény deriváltjaként, hanem egy olyan függvényként definiálnánk, amelynek integrálja az eloszlásfüggvény, akkor már egy általánosabb fogalomhoz juthatunk.

3.20. Definíció

A ξ valószínűségi változót *abszolút folytonosnak* nevezzük, ha létezik olyan $f_\xi \colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$ függvény, melyre

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,\mathrm{d}t$$

teljesül minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Ekkor f_ξ-t a ξ *sűrűségfüggvényének* nevezzük.

3.21. Feladat. Legyen $\Omega := [0, 1]$ és $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ geometriai valószínűségi mező, továbbá $\xi \colon \Omega \to \mathbb{R}$, $\xi(x) := x$. Bizonyítsuk be, hogy ξ abszolút folytonos valószínűségi változó!

Megoldás. A ξ definíció szerint valószínűségi változó, továbbá

$$F_\xi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0, \\ x, & \text{ha } 0 < x \le 1, \\ 1, & \text{ha } x > 1. \end{cases}$$

Legyen

$$f_\xi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_\xi(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Ekkor f_ξ a ξ sűrűségfüggvénye, hiszen nemnegatív függvény és minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,\mathrm{d}t$.

3.22. *Megjegyzés.* Ha ξ abszolút folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye f_ξ, akkor például a

$$g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} f_\xi(x), & \text{ha } x \ne 0, \\ f_\xi(0) + 1, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény is sűrűségfüggvénye ξ-nek. Ebből következően ξ-nek végtelen sok sűrűségfüggvénye van. Bizonyítható, hogy ezek a függvények csak egy Lebesgue-szerint nullmértékű halmazon különböznek egymástól, azaz *majdnem mindenütt* megegyeznek.

A Riemann-integrálhatóságra vonatkozó Lebesgue-kritérium szerint a sűrűségfüggvény majdnem mindenütt folytonos.

3.23. Tétel

Ha ξ abszolút folytonos valószínűségi változó, $a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$, akkor

$$\mathrm{P}(a \le \xi < b) = \int_{a}^{b} f_\xi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Bizonyítás. A 3.17. tétel és f_ξ definíciója alapján

$$\mathrm{P}(a \le \xi < b) = F_\xi(b) - F_\xi(a) = \int_{-\infty}^{b} f_\xi(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{a} f_\xi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a}^{b} f_\xi(x)\,\mathrm{d}x.$$

3.24. Tétel

Ha a ξ valószínűségi változó abszolút folytonos, akkor az eloszlásfüggvénye folytonos és majdnem mindenütt differenciálható – ahol a sűrűségfüggvény folytonos –, továbbá a differenciálható pontokban $F'_\xi(x) = f_\xi(x)$.

Bizonyítás. Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ és $\langle x_n \rangle \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton csökkenő x_0-hoz konvergáló sorozat. Ekkor

$$\langle a_n \rangle \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad a_n := \int_{x_0}^{x_n} f_\xi(t)\,\mathrm{d}t$$

monoton csökkenő alulról korlátos valós számsorozat. Ebből $\langle a_n \rangle$ konvergens. Így

$$\lim_{x \to x_0+0} F_\xi(x) - F_\xi(x_0) = \lim_{n\to\infty} \Big(F_\xi(x_n) - F_\xi(x_0)\Big) = \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x_n} f_\xi(t)\,\mathrm{d}t =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \int_{x_{n+m}}^{x_n} f_\xi(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} (a_n - a_{n+m}) = 0.$$

Tehát F_ξ jobbról folytonos, melyből (F4) alapján következik F_ξ folytonossága.

Ha az f_ξ folytonos az $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban, akkor adott $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy minden $x \in \mathbb{R}$, $|x - x_0| < \delta$ esetén $|f_\xi(x) - f_\xi(x_0)| < \varepsilon$ teljesül. Ezért minden $x \in \mathbb{R}$, $|x - x_0| < \delta$ esetén

$$\left|\frac{F_\xi(x) - F_\xi(x_0)}{x - x_0} - f_\xi(x_0)\right| = \left|\frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} f_\xi(t)\,\mathrm{d}t - f_\xi(x_0)\right| =$$
$$= \left|\frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} \Big(f_\xi(t) - f_\xi(x_0)\Big)\,\mathrm{d}t\right| < \frac{1}{|x - x_0|}\varepsilon|x - x_0| = \varepsilon,$$

így az F_ξ eloszlásfüggvény x_0-ban differenciálható és $F'_\xi(x_0) = f_\xi(x_0)$.

A következő tétel az integrál intervallum feletti additivitásából és a Newton–Leibniz-tételből következik.

3.25. Tétel

Legyen ξ valószínűségi változó. Ha F_ξ folytonos $\mathbb{R}$-en és véges sok ponttól eltekintve mindenhol differenciálható, akkor ξ abszolút folytonos és

$$f_\xi(x) = F'_\xi(x)$$

minden olyan x esetén, ahol F_ξ differenciálható.

3.26. *Megjegyzés.* A 3.24. tétel értelmében, ha F_ξ nem folytonos, akkor ξ nem abszolút folytonos. Így ha ξ diszkrét valószínűségi változó, akkor nem létezik sűrűségfüggvénye, azaz nem abszolút folytonos. Ha ξ abszolút folytonos, akkor az F_ξ folytonossága miatt az F_ξ értékkészlete nem megszámlálható, tehát nem diszkrét.

Létezik olyan ξ valószínűségi változó, amely nem abszolút folytonos és nem is diszkrét. Például legyen

$$F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0, \\ x, & \text{ha } 0 < x \le 0{,}5, \\ 1, & \text{ha } x > 0{,}5. \end{cases}$$

Ekkor F-re teljesülnek az (F1)–(F4) tulajdonságok, így a 3.16. tétel alapján létezik olyan ξ valószínűségi változó, melynek eloszlásfüggvénye F. Mivel F értékkészlete nem megszámlálható, ezért a 3.13. megjegyzés alapján ξ nem lehet diszkrét. Másrészt F az $x = 0{,}5$ pontban nem folytonos, tehát a 3.24. tétel miatt ξ abszolút folytonos sem lehet.

Abszolút folytonos ξ valószínűségi változó esetén a 3.24. tétel és a 3.19. következmény miatt $\mathrm{P}(\xi = x) = 0$ minden $x \in \mathbb{R}$-re. Így mindegy, hogy írunk-e vagy sem egyenlőséget a 3.23. tételben $\mathrm{P}(a \le \xi < b)$-ben.

3.27. Tétel

Ha ξ abszolút folytonos valószínűségi változó, akkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Bizonyítás. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{t} f_\xi(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} F_\xi(t) = 1.$

3.28. *Megjegyzés.* A 3.24. tétel megfordítása nem igaz. Azaz, ha egy ξ valószínűségi változó F_ξ eloszlásfüggvénye folytonos, akkor még nem biztos, hogy ξ abszolút folytonos. (Az F_ξ differenciálhatóságát majdnem mindenütt azért nem tettük fel külön, mert ez már következik az F_ξ folytonosságból és monoton növekedéséből.) Ugyanis van olyan folytonos eloszlásfüggvény, melynek a deriváltja majdnem mindenütt nulla. Így ebben az esetben, ha feltesszük, hogy ez egy abszolút folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, akkor azt kapnánk a 3.24. tétel miatt, hogy a sűrűségfüggvénye majdnem mindenütt nulla, ami ellentmond a 3.27. tételnek.

3.29. Tétel

Ha $f\colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$ függvény esetén

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1,$$

akkor létezik olyan ξ abszolút folytonos valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye f.

Bizonyítás. A sűrűségfüggvény definíciója és a 3.16. tétel miatt elég azt bizonyítani, hogy az

$$F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x) := \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

függvényre teljesülnek az (F1)–(F4) tulajdonságok. A definíció korrekt, ugyanis f integrálható $\mathbb{R}$-en, ezért bármely részintervallumán is integrálható. Így F minden x-re értelmezett.

(1) Legyen $x_1 < x_2$ valós számok. Az f nemnegatív, tehát

$$F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} f(t)\,\mathrm{d}t \le \int_{-\infty}^{x_1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t = F(x_2),$$

ami azt jelenti, hogy F monoton növekvő.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$

(3) Legyen $\langle x_n \rangle$ szigorúan monoton csökkenő $-\infty$-be divergáló sorozat. Ekkor az f nemnegativitása miatt

$$\int_{-\infty}^{x_n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

monoton csökkenő, alulról korlátos sorozat, melynek 0 alsó korlátja. Ezért létezik az

$$a := \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{x_n} f(t)\,\mathrm{d}t \ge 0$$

határérték. Tegyük fel, hogy $a > 0$. Mivel

$$a \le \int_{-\infty}^{x_n} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{m\to\infty} \int_{-m}^{x_n} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

ezért minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik $N(n) \in \mathbb{N}$, hogy

$$\frac{a}{2} \leq \int_{-N(n)}^{x_n} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Az $\langle x_n \rangle$ tulajdonságai miatt létezik egy olyan $\langle n_m \rangle \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növekvő sorozat, melyre $x_{n_{m+1}} \leq -N(n_m)$ teljesül minden $m \in \mathbb{N}$ esetén. Így

$$k\frac{a}{2} \leq \int_{-N(n_1)}^{x_{n_1}} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-N(n_2)}^{x_{n_2}} f(t)\,\mathrm{d}t + \cdots + \int_{-N(n_k)}^{x_{n_k}} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_{-N(n_k)}^{x_{n_1}} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1,$$

azaz $k \leq \frac{2}{a}$ teljesül minden $k \in \mathbb{N}$ esetén, ami ellentmondás, így

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = 0.$$

Mivel az F monoton növekvő, ezért a 3.14. lemma miatt $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$.

(4) Végül a 3.24. tételhez hasonlóan bizonyítható, hogy F folytonos.

3.30. Feladat. Legyen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{a}{x^2+4}$. Milyen $a \in \mathbb{R}$ esetén létezik abszolút folytonos ξ valószínűségi változó, melynek f a sűrűségfüggvénye? Határozzuk meg ξ eloszlásfüggvényét!

Megoldás. A 3.29. tétel alapján

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{x^2+4}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{2}\Big[\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\Big]_{-\infty}^{\infty} = \frac{a\pi}{2} = 1,$$

melyből $a = \frac{2}{\pi}$ teljesül. Ekkor f nem negatív, ezért ilyen a érték mellett f sűrűségfüggvény. Így létezik egy olyan ξ valószínűségi változó, melynek

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{2}{\pi(x^2+4)}$$

a sűrűségfüggvénye. Az ehhez tartozó eloszlásfüggvény definíció szerint

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x} \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{t}{2}\right)^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\Big[\operatorname{arctg}\frac{t}{2}\Big]_{-\infty}^{x} = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + \frac{1}{2}.$$

3.31. *Megjegyzés.* Létezik nem korlátos sűrűségfüggvény is. Például legyen

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}}, & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Ekkor f a 3.29. tételből következően sűrűségfüggvény, másrészt nem korlátos. A bizonyítást az olvasóra bízzuk. Lássuk be azt is, hogy ez nem más, mint a későbbiekben tárgyalt [0,1]-en egyenletes eloszlású valószínűségi változó négyzetének sűrűségfüggvénye.

3.32. Tétel

Legyen ξ abszolút folytonos valószínűségi változó. Ekkor ξ^2 is abszolút folytonos, továbbá

$$f_{\xi^2}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad f_{\xi^2}(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{x}}\Big(f_\xi(\sqrt{x}\,)+f_\xi(-\sqrt{x}\,)\Big), & \text{ha } x>0,\\ 0, & \text{ha } x\le 0.\end{cases}$$

Bizonyítás. Ha $x>0$, akkor

$$F_{\xi^2}(x)=\mathrm{P}(\xi^2<x)=\mathrm{P}(-\sqrt{x}<\xi<\sqrt{x}\,)=F_\xi(\sqrt{x}\,)-F_\xi(-\sqrt{x}\,),$$

másrészt

$$\int_0^x \frac{1}{2\sqrt{t}}\Big(f_\xi\big(\sqrt{t}\big)+f_\xi\big(-\sqrt{t}\big)\Big)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\sqrt{x}}\Big(f_\xi(u)+f_\xi(-u)\Big)\,\mathrm{d}u=\int_0^{\sqrt{x}} f_\xi(u)\,\mathrm{d}u+$$
$$+\int_0^{\sqrt{x}} f_\xi(-v)\,\mathrm{d}v=\int_0^{\sqrt{x}} f_\xi(u)\,\mathrm{d}u-\int_0^{-\sqrt{x}} f_\xi(y)\,\mathrm{d}y=F_\xi(\sqrt{x}\,)-F_\xi(0)-$$
$$-\Big(F_\xi(-\sqrt{x}\,)-F_\xi(0)\Big)=F_\xi(\sqrt{x}\,)-F_\xi(-\sqrt{x}\,).$$

Az integrálásban az $u=\sqrt{t}$ és $y=-v$ helyettesítéseket alkalmaztuk. Tehát

$$F_{\xi^2}(x)=\int_{-\infty}^{x} f_{\xi^2}(t)\,\mathrm{d}t,$$

ha $x>0$. Ugyanez triviálisan teljesül, ha $x\le 0$.

3.33. Tétel

Legyen ξ abszolút folytonos valószínűségi változó. Ekkor $|\xi|$ is abszolút folytonos, továbbá

$$f_{|\xi|}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad f_{|\xi|}(x)=\begin{cases} f_\xi(x)+f_\xi(-x), & \text{ha } x>0,\\ 0, & \text{ha } x\le 0.\end{cases}$$

Bizonyítás. Ha $x>0$, akkor

$$F_{|\xi|}(x)=\mathrm{P}(|\xi|<x)=\mathrm{P}(-x<\xi<x)=F_\xi(x)-F_\xi(-x),$$

másrészt

$$\int_0^x\Big(f_\xi(t)+f_\xi(-t)\Big)\,\mathrm{d}t=\int_0^x f_\xi(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^x f_\xi(-u)\,\mathrm{d}u=\int_0^x f_\xi(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^{-x} f_\xi(v)\,\mathrm{d}v=$$

$$= F_\xi(x) - F_\xi(0) - \Big(F_\xi(-x) - F_\xi(0)\Big) = F_\xi(x) - F_\xi(-x).$$

Az integrálásban a $v = -u$ helyettesítést alkalmaztuk. Így

$$F_{|\xi|}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{|\xi|}(t)\,\mathrm{d}t,$$

ha $x > 0$. Ugyanez triviálisan teljesül, ha $x \le 0$, tehát igaz a tétel.

3.34. Feladat. A 3.30. feladatban definiált ξ esetén határozzuk meg ξ^2 és $|\xi|$ sűrűségfüggvényeit!

Megoldás. Mivel

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}\Big(f_\xi\big(\sqrt{x}\big) + f_\xi\big(-\sqrt{x}\big)\Big) = \frac{2}{\pi\sqrt{x}(x+4)},$$

ezért

$$f_{\xi^2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_{\xi^2}(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi\sqrt{x}(x+4)}, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{ha } x \le 0. \end{cases}$$

Másrészt

$$f_\xi(x) + f_\xi(-x) = \frac{4}{\pi(x^2+4)},$$

így

$$f_{|\xi|} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_{|\xi|}(x) = \begin{cases} \frac{4}{\pi(x^2+4)}, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{ha } x \le 0. \end{cases}$$

4. fejezet

Kétdimenziós eloszlások

A gyakorlatban sok olyan eset van, amikor két valószínűségi változó együttes viselkedését kell vizsgálni. Azonban a valószínűségi változók külön-külön vett eloszlása ezt nem határozza meg. Ezért vezetjük be a következő fogalmakat.

4.1. Definíció

Legyenek ξ és η valószínűségi változók. Ekkor a (ξ, η) rendezett elempárt *valószínűségi vektorváltozónak* nevezzük.

4.1. Együttes eloszlás

4.2. Definíció

Legyenek ξ és η diszkrét valószínűségi változók. Ezek *együttes eloszlásán* azt a függvényt értjük, amely minden $(k, l) \in R_\xi \times R_\eta$ elemhez hozzárendeli a

$$\mathrm{P}(\xi = k, \eta = l) := \mathrm{P}(\{\xi = k\} \cap \{\eta = l\})$$

valószínűséget.

A következő tétel a 3.10. tételhez hasonlóan bizonyítható.

4.3. Tétel

A ξ és η diszkrét valószínűségi változók együttes eloszlására teljesül, hogy

$$\sum_{k \in R_\xi} \sum_{l \in R_\eta} \mathrm{P}(\xi = k, \eta = l) = 1.$$

Másrészt, ha $H_1, H_2 \subset \mathbb{R}$ megszámlálható számosságú halmazok és $p\colon H_1 \times \times H_2 \to [0, 1]$ olyan függvény, melyre

$$\sum_{k \in H_1} \sum_{l \in H_2} p(k, l) = 1$$

teljesül, akkor létezik olyan valószínűségi mező és azon ξ és η diszkrét valószínűségi változók, melyekre $R_\xi = H_1$ és $R_\eta = H_2$, továbbá minden $(k,l) \in H_1 \times H_2$ esetén $\mathrm{P}(\xi = k, \eta = l) = p(k,l)$.

4.4. Definíció

Legyenek ξ és η diszkrét valószínűségi változók. Ekkor a ξ és η eloszlásait a (ξ, η) valószínűségi vektorváltozó *peremeloszlásainak* nevezzük.

Amint láttuk, a peremeloszlásokból nem tudunk következtetni az együttes eloszlásra. Viszont fordítva már igen, azaz az együttes eloszlás meghatározza a peremeloszlásokat. Erről szól a következő tétel.

4.5. Tétel

Legyenek ξ és η diszkrét valószínűségi változók. Ekkor a (ξ, η) peremeloszlásaira

$$\mathrm{P}(\xi = k) = \sum_{l \in R_\eta} \mathrm{P}(\xi = k, \eta = l) \quad \text{és} \quad \mathrm{P}(\eta = l) = \sum_{k \in R_\xi} \mathrm{P}(\xi = k, \eta = l)$$

teljesül minden $k \in R_\xi$ és $l \in R_\eta$ esetén.

Bizonyítás. A valószínűség additivitása és $\bigcup_{l \in R_\eta} \{\eta = l\} = \Omega$ miatt

$$\sum_{l \in R_\eta} \mathrm{P}(\xi = k, \eta = l) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{l \in R_\eta} (\{\xi = k\} \cap \{\eta = l\}) \right) =$$
$$= \mathrm{P}\left(\{\xi = k\} \cap \left(\bigcup_{l \in R_\eta} \{\eta = l\} \right) \right) = \mathrm{P}(\xi = k).$$

Az állítás másik fele hasonlóan bizonyítható.

4.2. Együttes eloszlásfüggvény

4.6. Definíció

A ξ és η valószínűségi változók *együttes eloszlásfüggvényén* az

$$F_{\xi,\eta} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad F_{\xi,\eta}(x,y) := \mathrm{P}(\xi < x, \eta < y) := \mathrm{P}(\{\xi < x\} \cap \{\eta < y\})$$

függvényt értjük. Az F_ξ és F_η függvényeket a (ξ, η) valószínűségi vektorváltozó *perem-eloszlásfüggvényeinek* nevezzük.

4.7. Tétel

Az $F_{\xi,\eta}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ együttes eloszlásfüggvényre teljesülnek a következő tulajdonságok:

(1) $F_{\xi,\eta}$ mindkét változójában monoton növekedő,

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} F_{\xi,\eta}(x,y) = 1$,

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x,y) = 0$, $\lim\limits_{y\to-\infty} F_{\xi,\eta}(x,y) = 0$

(4) $F_{\xi,\eta}$ mindkét változójában balról folytonos,

(5) $F_{\xi,\eta}(b_1,b_2) - F_{\xi,\eta}(b_1,a_2) - F_{\xi,\eta}(a_1,b_2) + F_{\xi,\eta}(a_1,a_2) \geq 0$ minden $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2$ valós számok esetén.

Bizonyítás. Az (1)–(4) tulajdonságok következnek a 3.15. tételből. Az (5)-höz azt fogjuk megmutatni, hogy

$$\begin{aligned} &F_{\xi,\eta}(b_1,b_2) - F_{\xi,\eta}(b_1,a_2) - F_{\xi,\eta}(a_1,b_2) + F_{\xi,\eta}(a_1,a_2) = \\ &= \mathrm{P}(a_1 \leq \xi < b_1, a_2 \leq \eta < b_2), \end{aligned} \tag{4.1}$$

ami nem lehet negatív. A bizonyításhoz definiáljuk az

$$\begin{aligned} A &:= \{\xi < b_1\} \cap \{\eta < b_2\}, \\ B &:= \{\xi < b_1\} \cap \{\eta < a_2\}, \\ C &:= \{\xi < a_1\} \cap \{\eta < b_2\}, \\ D &:= \{\xi < a_1\} \cap \{\eta < a_2\}, \\ E &:= \{a_1 \leq \xi < b_1\} \cap \{a_2 \leq \eta < b_2\} \end{aligned}$$

halmazokat. Ekkor $A = E \cup B \cup (C \setminus D)$, mely diszjunkt felbontás, így $D \subset C$ alapján

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(E) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C \setminus D) = \mathrm{P}(E) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(D)$$

következik, ami ekvivalens a (4.1) állítással.

4.8. Tétel

Az előző tétel megfordítása is igaz. Azaz, ha az $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényre teljesüljenek az (1)–(5) tulajdonságok, akkor vannak olyan ξ és η valószínűségi változók, melyeknek az együttes eloszlásfüggvénye F.

4.9. Tétel

Legyen (ξ, η) egy valószínűségi vektorváltozó. Ekkor a perem-eloszlásfüggvényekre fennállnak az

$$F_\xi(x) = \lim_{y\to\infty} F_{\xi,\eta}(x,y) \quad \text{és} \quad F_\eta(y) = \lim_{x\to\infty} F_{\xi,\eta}(x,y)$$

összefüggések minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén.

Bizonyítás. Legyen $\langle y_n \rangle \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ egy ∞-be divergáló szigorúan monoton növekvő sorozat, továbbá

$$A_n := \{\xi < x\} \cap \{\eta < y_n\}$$

minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Ekkor $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \{\xi < x\}$ és a valószínűség folytonossága miatt

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (\{\xi < x\} \cap \{\eta < y_n\})\right) = \mathrm{P}(\xi < x) = F_\xi(x).$$

Ebből a 3.14. lemma alapján kapjuk az állítás első felét. A másik állítás hasonlóan bizonyítható.

4.3. Együttes sűrűségfüggvény

4.10. Definíció

A (ξ, η) valószínűségi vektorváltozót *abszolút folytonosnak*, illetve a ξ, η valószínűségi változók együttes eloszlását abszolút folytonosnak nevezzük, ha létezik olyan $f_{\xi,\eta} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nemnegatív függvény, melyre

$$F_{\xi,\eta}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{\xi,\eta}(u,v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u$$

teljesül minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén. Ekkor az $f_{\xi,\eta}$ függvényt a (ξ, η) valószínűségi vektorváltozó *sűrűségfüggvényének*, illetve a ξ, η valószínűségi változók *együttes sűrűségfüggvényének* nevezzük. Az f_ξ és f_η függvényeket a (ξ, η) valószínűségi vektorváltozó *perem-sűrűségfüggvényeinek* nevezzük.

4.11. Tétel

Legyen (ξ, η) abszolút folytonos valószínűségi vektorváltozó. Ekkor a ξ és η valószínűségi változó is abszolút folytonos, vagyis léteznek a perem-sűrűség-függvények, továbbá

$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(x, y)\, \mathrm{d}y \quad \text{és} \quad f_\eta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(x, y)\, \mathrm{d}x$$

minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén.

Bizonyítás. A 4.9. tétel miatt

$$F_\xi(x) = \lim_{y\to\infty} F_{\xi,\eta}(x, y) = \lim_{y\to\infty} \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{\xi,\eta}(u, v)\, \mathrm{d}v\, \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(u, v)\, \mathrm{d}v \right) \mathrm{d}u,$$

ami a ξ sűrűségfüggvényének definíciója szerint az állítással ekvivalens. A másik állítás hasonlóan bizonyítható.

4.12. Tétel

Az $f_{\xi,\eta}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ együttes sűrűségfüggvényre teljesül, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 1.$$

Bizonyítás. A 4.11. tételből

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)\, \mathrm{d}x = 1.$$

Az előző tétel megfordítása is igaz.

4.13. Tétel

Ha az $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nemnegatív függvényre

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 1$$

teljesül, akkor léteznek olyan ξ és η valószínűségi változók, melyeknek az együttes sűrűségfüggvénye f.

A 4.11. tétel megfordítása nem igaz. Vagyis két abszolút folytonos valószínűségi változónak nem mindig van együttes sűrűségfüggvénye. Például amikor $\xi = \eta$. Ugyanis tegyük fel, hogy ez nem igaz, azaz létezik $f_{\xi,\xi}$. Ekkor $F_{\xi,\xi}(x,x) = F_\xi(x)$ miatt

$$\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{x} f_{\xi,\xi}(u,v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(u)\,\mathrm{d}u$$

minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Ebből következik, hogy

$$\int_{-\infty}^{x} f_{\xi,\xi}(u,v)\,\mathrm{d}v = f_\xi(u)$$

minden $x \in \mathbb{R}$ és majdnem minden u-ra. De ez csak úgy lehetséges, ha $f_{\xi,\xi}(u,v) = 0$ majdnem minden u-ra és v-re, ami ellentmond a 4.12. tételnek.

4.4. Valószínűségi változók függetlensége

4.14. Definíció

A $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ valószínűségi változókat *függetleneknek* nevezzük, ha minden $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}\{\xi_k < x_k\}\right) = \prod_{k=1}^{n}\mathrm{P}(\xi_k < x_k)$$

teljesül. A $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ valószínűségi változók *páronként függetlenek*, ha közülük bármely kettő független. Végtelen sok valószínűségi változót függetleneknek nevezzük, ha bármely véges részrendszere független.

4.15. Lemma. *Ha ξ és η független valószínűségi változók, akkor minden $a < b$ és $c < d$ valós számok esetén*

$$\mathrm{P}(a \le \xi < b)\,\mathrm{P}(c \le \eta < d) = \mathrm{P}(a \le \xi < b, c \le \eta < d).$$

Bizonyítás. Legyen $A := \{\xi < a\}$, $B := \{\xi < b\}$, $C := \{\eta < c\}$ és $D := \{\eta < d\}$. Ekkor $A \subset B$, $C \subset D$, a függetlenség és (4.1) miatt

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(a \le \xi < b)\,\mathrm{P}(c \le \eta < d) = \mathrm{P}(B \setminus A)\,\mathrm{P}(D \setminus C) = \\
&= \big(\mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A)\big)\big(\mathrm{P}(D) - \mathrm{P}(C)\big) = \mathrm{P}(B)\,\mathrm{P}(D) - \mathrm{P}(B)\,\mathrm{P}(C) - \\
&- \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(D) + \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(C) = F_{\xi,\eta}(b,d) - F_{\xi,\eta}(b,c) - F_{\xi,\eta}(a,d) + \\
&+ F_{\xi,\eta}(a,c) = \mathrm{P}(a \le \xi < b, c \le \eta < d).
\end{aligned}$$

4.16. Tétel

A ξ és η diszkrét valószínűségi változók pontosan akkor függetlenek, ha

$$\mathrm{P}(\xi = k, \eta = l) = \mathrm{P}(\xi = k)\,\mathrm{P}(\eta = l) \tag{4.2}$$

teljesül minden $k \in R_\xi$ és $l \in R_\eta$ esetén.

Bizonyítás. (1) Először tegyük fel, hogy ξ és η függetlenek, továbbá $k \in R_\xi$ és $l \in R_\eta$. Ekkor $A_{k,n} := \{k \le \xi < k + \frac{1}{n}\}$ és $B_{l,n} := \{l \le \eta < l + \frac{1}{n}\}$ $(n \in \mathbb{N})$ jelöléssel a valószínűség folytonossága miatt

$$\mathrm{P}(\xi = k) = \mathrm{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k,n}\right) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_{k,n})$$

és

$$\mathrm{P}(\eta = l) = \mathrm{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_{l,n}\right) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(B_{l,n}).$$

Ezt, a 4.15. lemmát és a valószínűség folytonosságát felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\xi = k)\,\mathrm{P}(\eta = l) &= \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_{k,n})\,\mathrm{P}(B_{l,n}) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_{k,n} \cap B_{l,n}) = \\ &= \mathrm{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (A_{k,n} \cap B_{l,n})\right) = \mathrm{P}(\xi = k, \eta = l).\end{aligned}$$

(2) Most tegyük fel, hogy (4.2) igaz minden $k \in R_\xi$ és $l \in R_\eta$ esetén. Legyen $x, y \in \mathbb{R}$, $A := \{k \in R_\xi : k < x\}$ és $B := \{l \in R_\eta : l < y\}$. Ekkor

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\xi < x, \eta < y) &= \mathrm{P}\left(\bigcup_{k\in A}\{\xi = k\}, \bigcup_{l\in B}\{\eta = l\}\right) = \\ &= \sum_{k\in A}\sum_{l\in B} \mathrm{P}(\xi = k, \eta = l) = \sum_{k\in A}\sum_{l\in B} \mathrm{P}(\xi = k)\,\mathrm{P}(\eta = l) = \\ &= \mathrm{P}\left(\bigcup_{k\in A}\{\xi = k\}\right)\mathrm{P}\left(\bigcup_{l\in B}\{\eta = l\}\right) = \mathrm{P}(\xi < x)\,\mathrm{P}(\eta < y),\end{aligned}$$

azaz ξ és η függetlenek.

4.17. Tétel

Legyen (ξ, η) egy abszolút folytonos valószínűségi vektorváltozó. Ekkor ξ és η pontosan akkor függetlenek, ha $f_{\xi,\eta}(x, y) = f_\xi(x) f_\eta(y)$ teljesül majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pontban.

Bizonyítás. A tétel az együttes sűrűségfüggvény és a függetlenség definíciójából következik, továbbá abból, hogy

$$F_\xi(x)F_\eta(y) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(u)\,\mathrm{d}u \int_{-\infty}^{y} f_\eta(v)\,\mathrm{d}v = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_\xi(u) f_\eta(v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u.$$

5. fejezet

Valószínűségi változók paraméterei

5.1. Várható érték

Egy kockajátékban 2 forintot veszítünk, ha 1-est, 2-est vagy 3-ast dobunk, 3 forintot veszítünk, ha 4-est vagy 5-öst dobunk, továbbá 6 forintot nyerünk, ha 6-ost dobunk. Kérdés, hogy érdemes-e játszani ezt a játékot, azaz hosszú távon nyerünk vagy vesztünk? Például, ha ötször játszunk és a dobássorozat eredménye 2, 6, 1, 2, 4, akkor egy játékban átlagban $(-2+6-2-2-3):5=-0{,}6$ forintot „nyertünk”, azaz 0,6 forintot veszítettünk. Ezt általánosítva, ha n dobásból k_1-szer veszítünk 2 forintot, k_2-ször veszítünk 3 forintot és k_3-szor nyerünk 6 forintot, akkor egy játékban az átlagos nyereményünk

$$\frac{-2\cdot k_1+(-3)\cdot k_2+6\cdot k_3}{n}=-2\cdot\frac{k_1}{n}+(-3)\cdot\frac{k_2}{n}+6\cdot\frac{k_3}{n}.$$

A későbbiekben tárgyalt Bernoulli-féle nagy számok törvénye pontosan azt fejezi ki, mint a jegyzet bevezetésében leírt gyakorlati tapasztalat, vagyis nagy számú kísérlet esetén a relatív gyakoriság a valószínűség körül ingadozik. Így

$$\begin{aligned}&-2\cdot\frac{k_1}{n}+(-3)\cdot\frac{k_2}{n}+6\cdot\frac{k_3}{n}\approx\\&\approx -2\,\mathrm{P}(\xi=-2)+(-3)\,\mathrm{P}(\xi=-3)+6\,\mathrm{P}(\xi=6)=\\&=-2\cdot\frac{1}{2}-3\cdot\frac{1}{3}+6\cdot\frac{1}{6}=-1,\end{aligned}$$

ahol ξ az egy játékbeli nyereményt jelenti. Ezt a számot a ξ várható értékének nevezzük. Mivel ez most negatív, ezért ezt a játékot hosszútávon nem éri meg játszani.

Általánosabban, ha a ξ diszkrét valószínűségi változó lehetséges értékei $x_1,\dots,x_m$ és ξ_i az i-edik kísérletben mért értéke ξ-nek, akkor a kísérletek számának (n) növelésével a ξ átlagos értéke egy kísérletben, vagyis a

$$\frac{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n}{n}\tag{5.1}$$

számtani közép értéke egyre kisebb mértékben ingadozik

$$x_1\,\mathrm{P}(\xi=x_1)+x_2\,\mathrm{P}(\xi=x_2)+\cdots+x_m\,\mathrm{P}(\xi=x_m)\tag{5.2}$$

körül, mely a ξ várható értéke. De nem csak véges értékkészletű valószínűségi változók esetén tapasztalható az (5.1) számtani közép ilyen „konvergens” viselkedése. A továbbiakban ki fogjuk terjeszteni a várható érték fogalmát minden ilyen tulajdonságú valószínűségi változóra. A nagy számok gyenge törvényénél fogjuk látni, hogy az így kapott definíció megfelel az elvártaknak.

A kiterjesztéshez először vegyük észre, hogy tetszőleges nemnegatív értékű ξ esetén úgy kaphatunk az (5.2) összeggel analóg formulát, ha ξ-t kis intervallumokon az intervallum alsó végpontjával helyettesítjük. Például $0 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_m$ osztópontokkal megadott beosztás esetén a várható értéket közelítsük az

$$x_1 \, \mathrm{P}(x_1 \leq \xi < x_2) + \cdots + x_{m-1} \, \mathrm{P}(x_{m-1} \leq \xi < x_m) + x_m \, \mathrm{P}(x_m \leq \xi)$$

összeggel. A közelítés annál pontosabb, minél finomabb a beosztás. A beosztás finomításával a fenti összeg a ξ nemnegativitása miatt nem csökkenhet, így a beosztás minden határon túl való finomítása során a fenti összegek pontos felső korlátját kapjuk.

5.1. Definíció

A nemnegatív értékű ξ valószínűségi változó *várható értékén* annak a halmaznak a pontos felső korlátját értjük, melynek elemei az összes

$$x_1 \, \mathrm{P}(x_1 \leq \xi < x_2) + \cdots + x_{m-1} \, \mathrm{P}(x_{m-1} \leq \xi < x_m) + x_m \, \mathrm{P}(x_m \leq \xi),$$

alakú szám, ahol $m \in \mathbb{N}$ és $0 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_m$ tetszőleges valós számok. A ξ várható értékét $\mathrm{E}\,\xi$ módon fogjuk jelölni. Minden nemnegatív értékű ξ valószínűségi változó esetén $\mathrm{E}\,\xi \in \mathbb{R}$ vagy $\mathrm{E}\,\xi = \infty$ teljesül. Ha $\mathrm{E}\,\xi \in \mathbb{R}$, akkor azt mondjuk, hogy ξ-nek *véges a várható értéke*.

Most rátérünk arra, hogy egy tetszőleges valószínűségi változó várható értékét hogyan definiáljuk. Ehhez szükségünk lesz a valószínűségi változó pozitív illetve negatív részének fogalmára.

5.2. Definíció

Ha $\xi \colon \Omega \to \mathbb{R}$, akkor legyen

$$\xi^+ \colon \Omega \to \mathbb{R}, \quad \xi^+(\omega) := \begin{cases} \xi(\omega), & \text{ha } \xi(\omega) > 0, \\ 0, & \text{ha } \xi(\omega) \leq 0 \end{cases}$$

a ξ *pozitív része* és

$$\xi^- \colon \Omega \to \mathbb{R}, \quad \xi^-(\omega) := \begin{cases} -\xi(\omega), & \text{ha } \xi(\omega) < 0, \\ 0, & \text{ha } \xi(\omega) \geq 0 \end{cases}$$

a ξ *negatív része*.

5.3. Tétel

Ha $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$, akkor $\xi = \xi^+ - \xi^-$, $|\xi| = \xi^+ + \xi^-$, $\xi^+ = \frac{1}{2}(|\xi| + \xi)$, $\xi^- = \frac{1}{2}(|\xi| - \xi)$.

Bizonyítás. Az első két állítás a definícióból adódik, a többi állítás pedig ezekből már következik.

5.4. Következmény

A $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor valószínűségi változó, ha ξ^+ és ξ^- valószínűségi változó.

A $\xi = \xi^+ - \xi^-$ összefüggés szerint minden valós értékű függvény felírható két nemnegatív függvény különbségeként. Mivel a várható értéktől „elvárható” az additív tulajdonság az (5.2) alapján, ezért természetes az ötlet, hogy egy tetszőleges valószínűségi változó várható értékét definiáljuk a pozitív és a negatív részek várható értékeinek különbségeként.

5.5. Definíció

Azt mondjuk, hogy a ξ valószínűségi változónak *létezik várható értéke*, ha ξ^+-nak vagy ξ^--nak véges a várható értéke. Ha ξ^+-nak és ξ^--nak is véges a várható értéke, akkor azt mondjuk, hogy a ξ valószínűségi változónak *véges a várható értéke*, továbbá ekkor az

$$\mathrm{E}\,\xi := \mathrm{E}\,\xi^+ - \mathrm{E}\,\xi^-$$

értéket ξ *várható értékének* nevezzük. Ha $\mathrm{E}\,\xi^+ = \infty$ és $\mathrm{E}\,\xi^- \in \mathbb{R}$, akkor legyen $\mathrm{E}\,\xi := \infty$. Ha $\mathrm{E}\,\xi^+ \in \mathbb{R}$ és $\mathrm{E}\,\xi^- = \infty$, akkor $\mathrm{E}\,\xi := -\infty$. Ha $\mathrm{E}\,\xi^+ = \mathrm{E}\,\xi^- = \infty$, akkor azt mondjuk, hogy ξ-nek *nem létezik várható értéke*.

A mértékelméletben az $\mathrm{E}\,\xi$ értéket $\int \xi \,\mathrm{d}\,\mathrm{P}$ módon jelöljük és a ξ valószínűségi változó P-szerinti integráljának nevezzük.

A várható érték csak a valószínűségi változó eloszlásfüggvényétől függ, ezért igaz a következő tétel.

5.6. Tétel

Ha ξ és η valószínűségi változók *azonos eloszlásúak* – ezalatt azt értjük, hogy megegyezik az eloszlásfüggvényük –, továbbá ξ-nek létezik várható értéke, akkor η-nak is létezik és $\mathrm{E}\,\xi = \mathrm{E}\,\eta$.

A továbbiakban többször előfordul, hogy olyan eseményt vizsgálunk, amelynek 1 a valószínűsége. Ilyenkor azt fogjuk mondani, hogy ez az esemény *majdnem biztosan* bekövetkezik (rövidítése: *m.b.*). Például, ha $\mathrm{P}(\xi = 0) = 1$, akkor azt fogjuk írni, hogy $\xi = 0$ m.b. teljesül.

5.7. Tétel

Ha a ξ és η valószínűségi változókra $\xi = \eta$ m.b., akkor ξ és η azonos eloszlásúak.

Bizonyítás. Mivel $\mathrm{P}(\xi = \eta) = 1$, így az 1.5. tétel (10) pontja miatt $\mathrm{P}(\xi < x) = \mathrm{P}(\xi < x, \xi = \eta) = \mathrm{P}(\eta < x, \xi = \eta) = \mathrm{P}(\eta < x)$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

5.8. Következmény

Ha a ξ és η valószínűségi változókra $\xi = \eta$ m.b. és ξ-nek létezik várható értéke, akkor η-nak is létezik és $\mathrm{E}\,\xi = \mathrm{E}\,\eta$.

5.9. Tétel Markov-egyenlőtlenség

Ha a ξ valószínűségi változóra teljesül, hogy $\xi \geq 0$ m.b., akkor létezik várható értéke, továbbá minden $c \geq 0$ esetén $\mathrm{E}\,\xi \geq c\,\mathrm{P}(\xi \geq c)$.

Bizonyítás. Mivel $\xi \geq 0$ m.b., ezért $\xi = \xi^+$ m.b., melyből az 5.8. következmény miatt $\mathrm{E}\,\xi = \mathrm{E}\,\xi^+$. Másrészt $c\,\mathrm{P}(\xi^+ \geq c)$ annak a halmaznak eleme, melynek $\mathrm{E}\,\xi^+$ a pontos felső korlátja. Így $\mathrm{E}\,\xi^+ \geq c\,\mathrm{P}(\xi^+ \geq c)$. Végül az 5.7. tételből $\mathrm{P}(\xi^+ \geq c) = \mathrm{P}(\xi \geq c)$. Mindezekből adódik az állítás.

5.10. Tétel

Ha a ξ valószínűségi változóra teljesül, hogy $\mathrm{E}\,\xi = 0$ és $\xi \geq 0$ m.b., akkor $\xi = 0$ m.b. teljesül.

Bizonyítás. A Markov-egyenlőtlenség miatt $0 = \mathrm{E}\,\xi \geq \frac{1}{n}\mathrm{P}\big(\xi \geq \frac{1}{n}\big)$, amiből következik, hogy $\mathrm{P}\big(\xi \geq \frac{1}{n}\big) = 0$ minden $n \in \mathbb{N}$-re. Ebből a valószínűség folytonossága miatt

$$0 = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\xi \geq \frac{1}{n}\right) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{\xi \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = \mathrm{P}(\xi > 0).$$

Így tehát $1 = \mathrm{P}(\xi \geq 0) = \mathrm{P}(\xi > 0) + \mathrm{P}(\xi = 0) = \mathrm{P}(\xi = 0)$.

5.11. Tétel

Legyenek ξ és η tetszőleges valószínűségi változók.

(1) ξ-nek pontosan akkor véges a várható értéke, ha $|\xi|$-nek véges a várható értéke.

(2) Ha $c \in \mathbb{R}$ esetén $\xi = c$ m.b., akkor ξ-nek véges a várható értéke és $\mathrm{E}\,\xi = c$.

(3) Ha ξ-nek véges a várható értéke és $c \in \mathbb{R}$, akkor $c\xi$-nek is véges a várható értéke, továbbá $\mathrm{E}(c\xi) = c\,\mathrm{E}\,\xi$.

(4) Ha ξ-nek és η-nak végesek a várható értékeik, akkor $(\xi+\eta)$-nak is az, továbbá $\mathrm{E}(\xi+\eta) = \mathrm{E}\,\xi + \mathrm{E}\,\eta$.

(5) Ha ξ-nek és η-nak véges a várható értéke és $\xi \le \eta$ m.b., akkor $\mathrm{E}\,\xi \le \mathrm{E}\,\eta$.

(6) Ha η-nak véges a várható értéke és $|\xi| \le \eta$ m.b., akkor ξ-nek is véges a várható értéke.

(7) Ha ξ-nek és η-nak végesek a várható értékeik és függetlenek, akkor $\xi\eta$-nak is véges a várható értéke, továbbá $\mathrm{E}(\xi\eta) = \mathrm{E}\,\xi\,\mathrm{E}\,\eta$.

5.12. Tétel

Ha ξ és η olyan valószínűségi változók, melyekre ξ^2-nek és η^2-nek végesek a várható értékeik, akkor $\xi\eta$-nak is véges a várható értéke.

Bizonyítás. Ekkor $\frac{1}{2}(\xi^2+\eta^2)$-nek véges a várható értéke, melyből

$$|\xi\eta| \le \frac{1}{2}(\xi^2+\eta^2)$$

miatt következik az állítás.

5.13. Tétel

Ha ξ olyan valószínűségi változó, melyre ξ^2-nek véges a várható értéke, akkor ξ-nek is véges a várható értéke.

Bizonyítás. Legyen η olyan valószínűségi változó, melyre $\eta(\omega) = 1$ teljesül minden $\omega \in \Omega$ esetén. Ekkor az előző tételből kapjuk az állítást.

5.14. Tétel

Legyen ξ diszkrét valószínűségi változó és $R_\xi = \{x_1, \ldots, x_m\}$. Ekkor ξ-nek véges a várható értéke és

$$\mathrm{E}\,\xi = \sum_{k=1}^{m} x_k \,\mathrm{P}(\xi = x_k).$$

5.15. Tétel

Legyen ξ diszkrét valószínűségi változó és $R_\xi = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$. Ekkor

$$\mathrm{E}\,\xi^+ = \sum_{k\in I^+} x_k \,\mathrm{P}(\xi = x_k) \quad \text{és} \quad \mathrm{E}\,\xi^- = \sum_{k\in I^-} (-x_k) \,\mathrm{P}(\xi = x_k),$$

ahol $I^+ = \{k \in \mathbb{N} : x_k > 0\}$ és $I^- = \{k \in \mathbb{N} : x_k < 0\}$. Ennek következményeként a ξ-nek pontosan akkor véges a várható értéke, ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \, \mathrm{P}(\xi = x_k) \in \mathbb{R},$$

és ekkor

$$\mathrm{E}\,\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \, \mathrm{P}(\xi = x_k).$$

5.16. Tétel

Legyen ξ abszolút folytonos valószínűségi változó. Ekkor

$$\mathrm{E}\,\xi^+ = \int_0^{\infty} x f_\xi(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{és} \quad \mathrm{E}\,\xi^- = \int_{-\infty}^{0} (-x) f_\xi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ennek következményeként a ξ-nek pontosan akkor véges a várható értéke, ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_\xi(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R},$$

és ekkor

$$\mathrm{E}\,\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)\,\mathrm{d}x.$$

5.17. Feladat. Egy gép az indítógomb megnyomására 0,05 valószínűséggel indul el. A gombot annyiszor nyomjuk meg, amíg a gép működésbe nem lép. Legyen ξ a gomb megnyomásának a száma. Határozzuk meg ξ várható értékét!

Megoldás. Legyen $p := 0{,}05$ és $q := 1 - p$. Feltesszük, hogy az egyes indítások egymástól függetlenek. Ekkor $x_k = k$, $(k \in \mathbb{N})$ és $\mathrm{P}(\xi = x_k) = pq^{k-1}$ teljesül. Ebből

$$\mathrm{E}\,\xi = \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty} (q^k)' = p\left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right)' = p\left(\frac{q}{1-q}\right)' = \frac{1}{p} = 20.$$

5.18. Feladat. Legyen $\xi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $\xi(k) := 2^k$ és $\mathrm{P}(\xi = 2^k) := 0{,}5^k$ minden $k \in \mathbb{N}$ esetén. Határozzuk meg ξ várható értékét!

Megoldás. A feladat korrekt, ugyanis

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}(\xi = 2^k) = \sum_{k=1}^{\infty} 0{,}5^k = 1,$$

azaz eloszlást ad meg. Másrészt

$$\mathrm{E}\,\xi = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot 0{,}5^k = \infty.$$

5.19. Feladat. Legyen $f_\xi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_\xi(x) := \frac{1}{2}e^{-|x|}$. Határozzuk meg ξ várható értékét!

Megoldás. Az f_ξ nemnegatív és páros függvény, ezért

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}e^{-|x|}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = \Big[-e^{-x}\Big]_0^{\infty} = 1$$

teljesül, vagyis f_ξ sűrűségfüggvény. Másrészt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_\xi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot \frac{1}{2}e^{-|x|}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\infty} x e^{-x}\,\mathrm{d}x = \Big[-e^{-x}(1+x)\Big]_0^{\infty} = 1,$$

vagyis ξ-nek véges a várható értéke, ami az $x f_\xi(x)$ páratlansága miatt 0.

5.20. Feladat. Legyen $f_\xi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_\xi(x) := \frac{2}{\pi(x^2+4)}$. Határozzuk meg ξ várható értékét!

Megoldás. A 3.30. feladatban láttuk, hogy f_ξ sűrűségfüggvény, másrészt

$$\mathrm{E}\,\xi^+ = \int_{0}^{\infty} x f_\xi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\infty} \frac{2x}{\pi(x^2+4)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\Big[\ln(x^2+4)\Big]_0^{\infty} = \infty,$$

illetve hasonlóan

$$\mathrm{E}\,\xi^- = \int_{-\infty}^{0} (-x) f_\xi(x)\,\mathrm{d}x = \infty.$$

Tehát ξ-nek nem létezik várható értéke.

5.21. Tétel

Legyen ξ diszkrét valószínűségi változó és $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre $g(\xi)$ is valószínűségi változó. A $g(\xi)$-nek pontosan akkor véges a várható értéke, ha

$$\sum_{x \in R_\xi} |g(x)|\,\mathrm{P}(\xi = x) \in \mathbb{R},$$

továbbá ekkor

$$\mathrm{E}\Big(g(\xi)\Big) = \sum_{x \in R_\xi} g(x)\,\mathrm{P}(\xi = x).$$

5.22. Tétel

Legyen ξ abszolút folytonos valószínűségi változó, továbbá $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre $g(\xi)$ is valószínűségi változó. A $g(\xi)$-nek pontosan akkor véges a várható értéke, ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| f_\xi(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R},$$

továbbá ekkor

$$\mathrm{E}\big(g(\xi)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_\xi(x)\,\mathrm{d}x.$$

5.23. Feladat. Az előző tételt bizonyítsuk be a következő speciális esetekben! Ha ξ abszolút folytonos valószínűségi változó, akkor

$$\mathrm{E}\,\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{és} \quad \mathrm{E}\,|\xi| = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_\xi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Megoldás. (1) Mivel $\xi^2 = (\xi^2)^+$, ezért az 5.16. tétel miatt

$$\mathrm{E}\,\xi^2 = \int_0^{\infty} x f_{\xi^2}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Másrészt a 3.32. tétel miatt

$$\int_0^{\infty} x f_{\xi^2}(x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^{\infty} x \frac{1}{2\sqrt{x}} \Big(f_\xi\big(\sqrt{x}\big) + f_\xi\big(-\sqrt{x}\big)\Big)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} u^2 f_\xi(u)\,\mathrm{d}u + \int_0^{\infty} u^2 f_\xi(-u)\,\mathrm{d}u =$$
$$= \int_0^{\infty} u^2 f_\xi(u)\,\mathrm{d}u + \int_0^{-\infty} (-v^2) f_\xi(v)\,\mathrm{d}v = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Az integrálásban az $u := \sqrt{x}$, majd a $v := -u$ helyettesítéseket alkalmaztuk.

(2) Mivel $|\xi| = (|\xi|)^+$, ezért az 5.16. tétel miatt

$$\mathrm{E}\,|\xi| = \int_0^{\infty} x f_{|\xi|}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Másrészt a 3.33. tétel miatt

$$\int_0^{\infty} x f_{|\xi|}(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^\infty x f_\xi(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^\infty x f_\xi(-x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty x f_\xi(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{-\infty} u f_\xi(u)\,\mathrm{d}u =$$

$$= \int_0^\infty x f_\xi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^0 (-x) f_\xi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^\infty |x| f_\xi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Az integrálásban az $u := -x$ helyettesítést alkalmaztuk.

5.24. Tétel

Legyen ξ és η diszkrét valószínűségi változók és $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre $g(\xi,\eta)$ valószínűségi változó. A $g(\xi,\eta)$-nak pontosan akkor véges a várható értéke, ha

$$\sum_{x\in R_\xi}\sum_{y\in R_\eta} |g(x,y)|\,\mathrm{P}(\xi = x, \eta = y) \in \mathbb{R},$$

továbbá ekkor

$$\mathrm{E}\big(g(\xi,\eta)\big) = \sum_{x\in R_\xi}\sum_{y\in R_\eta} g(x,y)\,\mathrm{P}(\xi = x, \eta = y).$$

5.25. Tétel

Legyen a ξ és η valószínűségi változók együttes eloszlása abszolút folytonos és $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre $g(\xi,\eta)$ valószínűségi változó. A $g(\xi,\eta)$-nak pontosan akkor véges a várható értéke, ha

$$\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty |g(x,y)| f_{\xi,\eta}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \in \mathbb{R},$$

továbbá ekkor

$$\mathrm{E}\big(g(\xi,\eta)\big) = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty g(x,y) f_{\xi,\eta}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

5.2. Szórásnégyzet

Ebben a részben egy valószínűségi változónak a várható értéke körüli ingadozását jellemezzük. Egy c érték körüli szórásról például az átlagos abszolút eltérés adhat információt, azaz $\mathrm{E}\,|\xi - c|$. Ez azonban egy természetes elvárást nem teljesít, nevezetesen, hogy a várható érték körüli szórás legyen a legkisebb. Például $R_\xi = \{0,1\}$, $\mathrm{P}(\xi = 0) = 0{,}3$ és $\mathrm{P}(\xi = 1) = 0{,}7$ esetén $\mathrm{E}\,\xi = 0{,}7$, de $\mathrm{E}\,|\xi - 0{,}8| < \mathrm{E}\,|\xi - \mathrm{E}\,\xi|$. Másik lehetőség az átlagos abszolút eltérés helyett az átlagos négyzetes eltérés, azaz

$\mathrm{E}(\xi - c)^2$. A későbbiekben látni fogjuk, hogy erre teljesül az $\mathrm{E}(\xi - \mathrm{E}\,\xi)^2 \le \mathrm{E}(\xi - c)^2$ egyenlőtlenség minden $c \in \mathbb{R}$ esetén.

5.26. Definíció

Legyen ξ véges várható értékű valószínűségi változó. Ekkor a

$$\mathrm{D}^2\,\xi := \mathrm{E}(\xi - \mathrm{E}\,\xi)^2$$

értéket ξ *szórásnégyzetének* nevezzük. Ha $\mathrm{D}^2\,\xi \in \mathbb{R}$, akkor azt mondjuk, hogy ξ *véges szórású*. A

$$\mathrm{D}\,\xi := \begin{cases} \sqrt{\mathrm{D}^2\,\xi}, & \text{ha } \mathrm{D}^2\,\xi \in \mathbb{R}, \\ \infty, & \text{ha } \mathrm{D}^2\,\xi = \infty, \end{cases}$$

értéket a ξ *szórásának* nevezzük.

5.27. Tétel

A ξ valószínűségi változó pontosan akkor véges szórású, ha ξ^2-nek véges a várható értéke, és ekkor

$$\mathrm{D}^2\,\xi = \mathrm{E}\,\xi^2 - \mathrm{E}^2\,\xi.$$

Bizonyítás. Mivel $(\xi - \mathrm{E}\,\xi)^2 = \xi^2 - 2\xi\,\mathrm{E}\,\xi + \mathrm{E}^2\,\xi$, ezért az állítás az 5.13. tétel és az 5.11. tétel (2)–(4) pontjai miatt teljesül.

5.28. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha ξ^2-nek véges a várható értéke, akkor minden $c \in \mathbb{R}$ esetén $\mathrm{E}(\xi - \mathrm{E}\,\xi)^2 \le \mathrm{E}(\xi - c)^2$, azaz valóban teljesül a szórásnégyzet bevezetésénél elmondottak!

Megoldás. A bizonyítandó egyenlőtlenség azzal ekvivalens, hogy

$$\mathrm{E}\,\xi^2 - \mathrm{E}^2\,\xi \le \mathrm{E}\,\xi^2 - 2c\,\mathrm{E}\,\xi + c^2,$$

ami teljesül, hiszen ez $0 \le (\mathrm{E}\,\xi - c)^2$ egyenlőtlenséggel ekvivalens.

5.29. *Megjegyzés.* Ha ξ^2-nek véges a várható értéke, akkor

$$\mathrm{D}^2\,\xi = \sum_{k=1}^{m} x_k^2\,\mathrm{P}(\xi = x_k) - \left(\sum_{k=1}^{m} x_k\,\mathrm{P}(\xi = x_k)\right)^2,$$

$$\mathrm{D}^2\,\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2\,\mathrm{P}(\xi = x_k) - \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k\,\mathrm{P}(\xi = x_k)\right)^2$$

vagy

$$\mathrm{D}^2\,\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x)\,\mathrm{d}x - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

aszerint, hogy $R_\xi = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, $R_\xi = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ vagy ξ abszolút folytonos.

5.30. Feladat. Számoljuk ki az 5.17. feladatban definiált ξ szórásnégyzetét!

Megoldás. Az ottani jelölésekkel

$$\mathrm{E}\,\xi^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2\,\mathrm{P}(\xi = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 p q^{k-1} = p\left(\sum_{k=1}^{\infty} k q^k\right)' = p\left(\frac{q}{(1-q)^2}\right)' = \frac{2-p}{p^2},$$

így

$$\mathrm{D}^2\,\xi = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2} = 380.$$

5.31. Feladat. Számoljuk ki az 5.19. feladatban definiált ξ szórásnégyzetét!

Megoldás. Felhasználva az 5.19. feladat eredményét,

$$\mathrm{D}^2\,\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{2} e^{-|x|}\,\mathrm{d}x - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{2} e^{-|x|}\,\mathrm{d}x\right)^2 = \int_{0}^{\infty} x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x = 2.$$

Az utóbbi integrált kétszeres parciális integrálással és a L'Hospital-szabály segítségével számoltuk ki.

5.32. Tétel

Ha ξ véges szórású valószínűségi változó és $a, b \in \mathbb{R}$, akkor az $a\xi + b$ is véges szórású, továbbá

$$\mathrm{D}^2(a\xi + b) = a^2\,\mathrm{D}^2\,\xi, \quad \text{illetve} \quad \mathrm{D}(a\xi + b) = |a|\,\mathrm{D}\,\xi.$$

Bizonyítás. $(a\xi + b - \mathrm{E}(a\xi + b))^2 = (a\xi + b - a\,\mathrm{E}\,\xi - b)^2 = a^2(\xi - \mathrm{E}\,\xi)^2$, amiből következik az állítás.

6. fejezet

Valószínűségi változók kapcsolatának jellemzése

Két mérőszámot fogunk bevezetni a valószínűségi változók kapcsolatának jellemzésére: a kovarianciát és a korrelációs együtthatót. Ezek segítségével lehet megmutatni, hogy két valószínűségi változó közötti kapcsolat mennyire tekinthető lazának, illetve, ha van közöttük függőségi viszony, akkor az mennyire tekinthetőnek lineáris kapcsolatnak.

6.1. Kovariancia

6.1. Definíció

A véges várható értékű ξ és η valószínűségi változók *kovarianciája*

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) := \mathrm{E}\Big((\xi - \mathrm{E}\,\xi)(\eta - \mathrm{E}\,\eta)\Big),$$

feltéve, hogy ez a várható érték létezik.

A következő két tétel a kovariancia definíciójának következményei.

6.2. Tétel

Ha a ξ és η valószínűségi változóknak létezik a kovarianciája, akkor

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \operatorname{cov}(\eta, \xi).$$

6.3. Tétel

Ha a ξ valószínűségi változónak véges a várható értéke, akkor

$$\mathrm{D}^2\,\xi = \operatorname{cov}(\xi, \xi).$$

6.4. Tétel

A ξ és η véges várható értékű valószínűségi változóknak pontosan akkor véges a kovarianciája, ha $\xi\eta$-nak véges a várható értéke, továbbá ekkor

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \mathrm{E}(\xi\eta) - \mathrm{E}\,\xi\,\mathrm{E}\,\eta.$$

Bizonyítás. Az állítás a

$$(\xi - \mathrm{E}\,\xi)(\eta - \mathrm{E}\,\eta) = \xi\eta - \eta\,\mathrm{E}\,\xi - \xi\,\mathrm{E}\,\eta + \mathrm{E}\,\xi\,\mathrm{E}\,\eta$$

egyenlőség következménye.

6.5. Tétel

Ha a ξ és η valószínűségi változók véges szórásúak, akkor a kovarianciájuk is véges.

Bizonyítás. Az 5.27. tétel miatt ξ^2-nek és η^2-nek véges a várható értéke. Így az 5.12. tétel miatt $\xi\eta$-nak, illetve az 5.13. tételből a ξ-nek és η-nak is végesek a várható értékeik. Így a 6.4. tétel miatt igaz az állítás.

6.6. Tétel

Ha a ξ és η független valószínűségi változóknak végesek a várható értékeik, akkor $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = 0$.

Bizonyítás. Az 5.11. tétel (7) pontja alapján $\xi\eta$-nak is véges a várható értéke, továbbá $\mathrm{E}(\xi\eta) = \mathrm{E}\,\xi\,\mathrm{E}\,\eta$, így a 6.4. tételből következik az állítás.

6.7. *Megjegyzés.* Az előző tétel megfordítása nem igaz. Például ha $\Omega := \{1, 2, 3, 4\}$, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ klasszikus valószínűségi mező, $\xi(1) = \xi(2) = 0$, $\xi(3) = -1$, $\xi(4) = 1$, $\eta(3) = \eta(4) = 0$, $\eta(1) = -1$ és $\eta(2) = 1$, akkor

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}(\xi = -1) = 0{,}25, \quad \mathrm{P}(\xi = 0) = 0{,}5, \quad \mathrm{P}(\xi = 1) = 0{,}25, \\ &\mathrm{P}(\eta = -1) = 0{,}25, \quad \mathrm{P}(\eta = 0) = 0{,}5, \quad \mathrm{P}(\eta = 1) = 0{,}25, \end{aligned}$$

továbbá $R_{\xi\eta} = \{-1, 0, 1\}$. Mivel $\{\xi\eta = 0\} = \Omega$, $\{\xi\eta = 1\} = \{\xi\eta = -1\} = \emptyset$, ezért $\mathrm{P}(\xi\eta = -1) = 0$, $\mathrm{P}(\xi\eta = 0) = 1$ és $\mathrm{P}(\xi\eta = 1) = 0$ teljesül. Így

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\,\xi &= -1 \cdot 0{,}25 + 0 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}25 = 0, \\ \mathrm{E}\,\eta &= -1 \cdot 0{,}25 + 0 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}25 = 0, \\ \mathrm{E}(\xi\eta) &= -1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Mindezekből a 6.4. tétel alapján $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = 0$. Másrészt $\mathrm{P}(\xi < 0, \eta < 0) = 0$ és $\mathrm{P}(\xi < 0)\,\mathrm{P}(\eta < 0) = 0{,}25 \cdot 0{,}25$, vagyis ξ és η nem függetlenek.

6.8. Tétel

Ha a $\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_m$ valószínűségi változókra $\operatorname{cov}(\xi_i, \eta_j) \in \mathbb{R}$ minden $i = 1, \dots, n$ és $j = 1, \dots, m$ esetén, továbbá $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$, akkor

$$\operatorname{cov}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i, \sum_{j=1}^{m} b_j \eta_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j \operatorname{cov}(\xi_i, \eta_j).$$

Bizonyítás. $\xi := \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \xi_i$ és $\eta := \sum\limits_{j=1}^{m} b_j \eta_j$ jelölésekkel

$$\xi - \mathrm{E}\,\xi = \sum_{i=1}^{n} a_i(\xi_i - \mathrm{E}\,\xi_i) \quad \text{és} \quad \eta - \mathrm{E}\,\eta = \sum_{j=1}^{m} b_j(\eta_j - \mathrm{E}\,\eta_j).$$

Így

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j \operatorname{cov}(\xi_i, \eta_j) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j \mathrm{E}\Big((\xi_i - \mathrm{E}\,\xi_i)(\eta_j - \mathrm{E}\,\eta_j)\Big) = \\
&= \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j (\xi_i - \mathrm{E}\,\xi_i)(\eta_j - \mathrm{E}\,\eta_j)\right) = \\
&= \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i (\xi_i - \mathrm{E}\,\xi_i) \sum_{j=1}^{m} b_j (\eta_j - \mathrm{E}\,\eta_j)\right) = \\
&= \mathrm{E}\Big((\xi - \mathrm{E}\,\xi)(\eta - \mathrm{E}\,\eta)\Big) = \operatorname{cov}(\xi, \eta).
\end{aligned}$$

A következő állítás a 6.5. és a 6.8. tételek következménye.

6.9. Tétel

Ha $\xi_1, \dots, \xi_n$ véges szórású valószínűségi változók, akkor

$$\mathrm{D}^2\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{D}^2\,\xi_i + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j).$$

Ebből adódik a következő tétel:

6.10. Tétel

Ha a $\xi_1, \dots, \xi_n$ páronként független valószínűségi változók véges szórásúak, akkor

$$\mathrm{D}^2\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{D}^2\,\xi_i.$$

6.2. Korrelációs együttható

6.11. Definíció

Ha a ξ és η valószínűségi változókra $\mathrm{D}\,\xi\,\mathrm{D}\,\eta \in \mathbb{R}^+$, akkor a

$$\operatorname{corr}(\xi,\eta) := \frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\mathrm{D}\,\xi\,\mathrm{D}\,\eta}$$

számot a ξ és η *korrelációs együtthatójának* nevezzük. Ha $\operatorname{corr}(\xi,\eta) = 0$, akkor ξ-t és η-t *korrelálatlanoknak* nevezzük.

Ha $\mathrm{D}\,\xi\,\mathrm{D}\,\eta \in \mathbb{R}^+$, akkor a 6.5. tételből $\operatorname{cov}(\xi,\eta) \in \mathbb{R}$, így korrekt a definíció. Ha ξ és η függetlenek és $\mathrm{D}\,\xi\,\mathrm{D}\,\eta \in \mathbb{R}^+$, akkor korrelálatlanok. Ez megfordítva nem igaz. Például a 6.7. megjegyzésben definiált ξ és η valószínűségi változókról könnyen beláthatja az olvasó, hogy $\mathrm{D}\,\xi\,\mathrm{D}\,\eta = 0{,}5$, így az ott bizonyított $\operatorname{cov}(\xi,\eta) = 0$ miatt $\operatorname{corr}(\xi,\eta) = 0$. Másrészt azt is bizonyítottuk, hogy ξ és η nem függetlenek.

A korrelációs együttható egy fontos tulajdonságának a vizsgálatához szükségünk lesz a következő fogalomra.

6.12. Definíció

Ha a ξ valószínűségi változóra $\mathrm{D}\,\xi \in \mathbb{R}^+$, akkor azt mondjuk, hogy ξ *standardizálható*, továbbá a ξ *standardizáltján* a

$$\widetilde{\xi} := \frac{\xi - \mathrm{E}\,\xi}{\mathrm{D}\,\xi}$$

valószínűségi változót értjük.

6.13. Tétel

Ha ξ standardizálható valószínűségi változó, akkor $\mathrm{E}\,\widetilde{\xi} = 0$ és $\mathrm{D}\,\widetilde{\xi} = 1$.

Bizonyítás. Ekkor

$$\mathrm{E}\,\widetilde{\xi} = \mathrm{E}\left(\frac{\xi - \mathrm{E}\,\xi}{\mathrm{D}\,\xi}\right) = \frac{1}{\mathrm{D}\,\xi}\,\mathrm{E}(\xi - \mathrm{E}\,\xi) = \frac{1}{\mathrm{D}\,\xi}(\mathrm{E}\,\xi - \mathrm{E}\,\xi) = 0$$

és

$$\mathrm{D}^2\,\widetilde{\xi} = \mathrm{D}^2\left(\frac{\xi - \mathrm{E}\,\xi}{\mathrm{D}\,\xi}\right) = \frac{1}{\mathrm{D}^2\,\xi}\,\mathrm{D}^2(\xi - \mathrm{E}\,\xi) = \frac{\mathrm{D}^2\,\xi}{\mathrm{D}^2\,\xi} = 1.$$

6.14. Tétel

Ha a ξ és η valószínűségi változókra $\mathrm{D}\,\xi\,\mathrm{D}\,\eta \in \mathbb{R}^+$, akkor

$$\operatorname{corr}(\xi,\eta) = \operatorname{cov}(\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}).$$

Bizonyítás. Definíció alapján létezik $\operatorname{corr}(\xi,\eta)$, $\widetilde{\xi}$ és $\widetilde{\eta}$. Mivel a standardizáltak szórása véges, így a kovarianciájuk is véges, továbbá

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}) &= \mathrm{E}\Big((\widetilde{\xi}-\mathrm{E}\,\widetilde{\xi})(\widetilde{\eta}-\mathrm{E}\,\widetilde{\eta})\Big) = \mathrm{E}(\widetilde{\xi}\widetilde{\eta}) = \\ &= \mathrm{E}\left(\frac{\xi-\mathrm{E}\,\xi}{\mathrm{D}\,\xi}\cdot\frac{\eta-\mathrm{E}\,\eta}{\mathrm{D}\,\eta}\right) = \frac{\mathrm{E}\Big((\xi-\mathrm{E}\,\xi)(\eta-\mathrm{E}\,\eta)\Big)}{\mathrm{D}\,\xi\,\mathrm{D}\,\eta} = \operatorname{corr}(\xi,\eta).\end{aligned}$$

6.15. Tétel

Ha a ξ és η valószínűségi változókra $\mathrm{D}\,\xi\,\mathrm{D}\,\eta\in\mathbb{R}^+$, akkor

$$|\operatorname{corr}(\xi,\eta)|\le 1.$$

Bizonyítás. A ξ és η standardizálható valószínűségi változók, így a 6.9. tételből

$$0\le \mathrm{D}^2(\widetilde{\xi}\pm\widetilde{\eta}) = \mathrm{D}^2\,\widetilde{\xi}+\mathrm{D}^2\,\widetilde{\eta}\pm 2\operatorname{cov}(\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}) = 2\Big(1\pm\operatorname{corr}(\xi,\eta)\Big)$$

teljesül, melyből következik az állítás.

6.16. Tétel

Legyen ξ és η olyan valószínűségi változók, melyekre $\eta = a\xi+b$ m.b., ahol $a,b\in\mathbb{R}$, $a\ne 0$, továbbá $\mathrm{D}\,\xi\in\mathbb{R}^+$. Ekkor

$$\operatorname{corr}(\xi,\eta) = \begin{cases} 1, & \text{ha } a>0,\\ -1, & \text{ha } a<0.\end{cases}$$

Bizonyítás. $\mathrm{D}\,\xi\in\mathbb{R}^+$ miatt $\mathrm{D}\,\eta\in\mathbb{R}^+$, így létezik a kovariancia és a korrelációs együttható is, továbbá

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(\xi,\eta) &= \mathrm{E}(\xi\eta)-\mathrm{E}\,\xi\,\mathrm{E}\,\eta = \mathrm{E}\Big(\xi(a\xi+b)\Big)-\mathrm{E}\,\xi\,\mathrm{E}(a\xi+b) = \\ &= a\,\mathrm{E}\,\xi^2+b\,\mathrm{E}\,\xi-a\,\mathrm{E}^2\,\xi-b\,\mathrm{E}\,\xi = a(\mathrm{E}\,\xi^2-\mathrm{E}^2\,\xi) = a\,\mathrm{D}^2\,\xi,\end{aligned}$$

így $\mathrm{D}\,\xi\,\mathrm{D}\,\eta = \mathrm{D}\,\xi\,\mathrm{D}(a\xi+b) = |a|\,\mathrm{D}^2\,\xi$ miatt kapjuk az állítást.

6.17. Tétel

Legyen ξ és η olyan valószínűségi változók, melyekre $|\operatorname{corr}(\xi,\eta)|=1$. Ekkor léteznek $a,b\in\mathbb{R}$, $a\ne 0$ konstansok, melyekre $\eta = a\xi+b$ m.b. teljesül.

Bizonyítás. A feltételek miatt $|\operatorname{cov}(\xi,\eta)| = \mathrm{D}\,\xi\,\mathrm{D}\,\eta$ teljesül, így

$$4\operatorname{cov}^2(\xi,\eta)-4\,\mathrm{D}^2\,\xi\,\mathrm{D}^2\,\eta = 0.$$

Ebből következik, hogy a $(\mathrm{D}^2\,\xi)x^2 - 2\operatorname{cov}(\xi,\eta)x + \mathrm{D}^2\,\eta = 0$ egyenletnek pontosan egy gyöke van, mely $\mathrm{D}\,\eta \neq 0$ miatt nullától különbözik. Jelöljük ezt a gyököt a-val. Ekkor

$$\begin{aligned}0 = (\mathrm{D}^2\,\xi)a^2 - 2\operatorname{cov}(\xi,\eta)a + \mathrm{D}^2\,\eta = a^2\,\mathrm{E}(\xi - \mathrm{E}\,\xi)^2 -\\ - 2a\,\mathrm{E}\Big((\xi - \mathrm{E}\,\xi)(\eta - \mathrm{E}\,\eta)\Big) + \mathrm{E}(\eta - \mathrm{E}\,\eta)^2 =\\ = \mathrm{E}\Big(a^2(\xi - \mathrm{E}\,\xi)^2 - 2a(\xi - \mathrm{E}\,\xi)(\eta - \mathrm{E}\,\eta) + (\eta - \mathrm{E}\,\eta)^2\Big) =\\ = \mathrm{E}\Big(a(\xi - \mathrm{E}\,\xi) - (\eta - \mathrm{E}\,\eta)\Big)^2\end{aligned}$$

teljesül. Legyen $\mu := \Big(a(\xi - \mathrm{E}\,\xi) - (\eta - \mathrm{E}\,\eta)\Big)^2$. Ebből $\mu \geq 0$ m.b., így $\mathrm{E}\,\mu = 0$ miatt az 5.10. tételből $\mu = 0$ m.b., azaz $\eta = a\xi + (\mathrm{E}\,\eta - a\,\mathrm{E}\,\xi)$ m.b. teljesül.

6.18. *Megjegyzés.* A bizonyításából az is kiderül, hogy $\operatorname{corr}(\xi,\eta) = 1$ esetén $a = \frac{\mathrm{D}\,\eta}{\mathrm{D}\,\xi}$ és $b = \mathrm{E}\,\eta - \frac{\mathrm{D}\,\eta}{\mathrm{D}\,\xi}\,\mathrm{E}\,\xi$, illetve ha $\operatorname{corr}(\xi,\eta) = -1$, akkor $a = -\frac{\mathrm{D}\,\eta}{\mathrm{D}\,\xi}$ és $b = \mathrm{E}\,\eta + \frac{\mathrm{D}\,\eta}{\mathrm{D}\,\xi}\,\mathrm{E}\,\xi$.

6.19. Definíció

Legyen ξ és η olyan valószínűségi változók, melyekre valamely $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ esetén $\eta = a\xi + b$ m.b. teljesül. Ekkor azt mondjuk, hogy ξ és η *lineárisan függőek*.

A ξ valószínűségi változó eloszlását *elfajultnak* nevezzük, ha valamely $c \in \mathbb{R}$ esetén $\xi = c$ m.b. teljesül. Könnyen látható, hogy ha ξ eloszlása nem elfajult, akkor létezik olyan $x \in \mathbb{R}$, hogy $0 < \mathrm{P}(\xi < x) < 1$.

Ha ξ és η lineárisan függőek és ξ eloszlása nem elfajult, akkor ξ és η nem függetlenek. Ennek belátásához válasszunk egy olyan x számot, melyre $0 < \mathrm{P}(\xi < x) < 1$, továbbá $y := ax + b$. Ekkor

$$\mathrm{P}(\xi < x, \eta < y) = \mathrm{P}(\xi < x, a\xi + b < ax + b) = \mathrm{P}(\xi < x),$$

másrészt

$$\mathrm{P}(\xi < x)\,\mathrm{P}(\eta < y) = \mathrm{P}(\xi < x)\,\mathrm{P}(a\xi + b < ax + b) = \mathrm{P}^2(\xi < x).$$

Így, ha ξ és η függetlenek lennének, akkor $\mathrm{P}(\xi < x) = \mathrm{P}^2(\xi < x)$ teljesülne, azaz $\mathrm{P}(\xi < x) = 1$ vagy $\mathrm{P}(\xi < x) = 0$, ami ellentmondás.

6.20. Következmény

A ξ és η korrelációs együtthatóval rendelkező valószínűségi változók esetén $|\operatorname{corr}(\xi,\eta)| = 1$ pontosan akkor teljesül, ha ξ és η lineárisan függőek.

6.21. Feladat. Legyen a ξ és η valószínűségi változók értékkészlete $\{0, 1\}$, melyekre teljesülnek a következők:

$$\mathrm{P}(\xi = 0, \eta = 0) = 0{,}4$$

$$\begin{aligned} P(\xi = 0, \eta = 1) &= 0{,}06 \\ P(\xi = 1, \eta = 0) &= 0{,}04. \end{aligned}$$

Számítsuk ki a ξ és η korrelációs együtthatóját!

Megoldás. $P(\xi = 1, \eta = 1) = 1 - 0{,}4 - 0{,}06 - 0{,}04 = 0{,}5$. Másrészt a peremeloszlások a 4.5. tétel miatt

$$\begin{aligned} P(\xi = 0) &= 0{,}4 + 0{,}06 = 0{,}46, \\ P(\xi = 1) &= 0{,}04 + 0{,}5 = 0{,}54, \\ P(\eta = 0) &= 0{,}4 + 0{,}04 = 0{,}44, \\ P(\eta = 1) &= 0{,}06 + 0{,}5 = 0{,}56. \end{aligned}$$

Ezeket az eredményeket a következő táblázatban foglaljuk össze:

	$\eta = 0$	$\eta = 1$	összeg
$\xi = 0$	0,4	0,06	0,46
$\xi = 1$	0,04	0,5	0,54
összeg	0,44	0,56	1

Ebből

$$\begin{aligned} E\,\xi &= 0 \cdot 0{,}46 + 1 \cdot 0{,}54 = 0{,}54, \\ E\,\xi^2 &= 0^2 \cdot 0{,}46 + 1^2 \cdot 0{,}54 = 0{,}54, \\ E\,\eta &= 0 \cdot 0{,}44 + 1 \cdot 0{,}56 = 0{,}56, \\ E\,\eta^2 &= 0^2 \cdot 0{,}44 + 1^2 \cdot 0{,}56 = 0{,}56, \end{aligned}$$

így

$$\begin{aligned} D\,\xi &= \sqrt{E\,\xi^2 - E^2\,\xi} = \sqrt{0{,}54 - 0{,}54^2} \approx 0{,}4984, \\ D\,\eta &= \sqrt{E\,\eta^2 - E^2\,\eta} = \sqrt{0{,}56 - 0{,}56^2} \approx 0{,}4964. \end{aligned}$$

Másrészt az 5.24. tétel miatt

$$E(\xi\eta) = 0 \cdot 0 \cdot 0{,}4 + 0 \cdot 1 \cdot 0{,}06 + 1 \cdot 0 \cdot 0{,}04 + 1 \cdot 1 \cdot 0{,}5 = 0{,}5.$$

Ebből

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E\,\xi\,E\,\eta = 0{,}5 - 0{,}54 \cdot 0{,}56 = 0{,}1976,$$

így kapjuk, hogy

$$\operatorname{corr}(\xi, \eta) = \frac{\operatorname{cov}(\xi, \eta)}{D\,\xi\,D\,\eta} \approx \frac{0{,}1976}{0{,}4984 \cdot 0{,}4964} \approx 0{,}7987.$$

6.22. Feladat. Legyen

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) := \begin{cases} c, & \text{ha } 0 < x < 5{,}1 \text{ és } 5{,}1 - x < y < 14 - x, \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$$

ahol $c \in \mathbb{R}$. Határozzuk meg úgy a c értékét, hogy f együttes sűrűségfüggvény legyen, továbbá ebben az esetben számoljuk ki az f-hez tartozó ξ és η valószínűségi változók korrelációs együtthatóját!

Megoldás. A 4.12. tétel alapján

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{0}^{5,1}\int_{5,1-x}^{14-x} c\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 45{,}39c = 1,$$

melyből $c = \frac{1}{45{,}39}$. A 4.11. tétel miatt

$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{5,1-x}^{14-x} c\,\mathrm{d}y = 8{,}9c,$$

ha $0 < x \leq 5{,}1$, különben $f_\xi(x) = 0$. Így

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\,\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{5,1} x 8{,}9c\,\mathrm{d}x = 2{,}55\\
\mathrm{E}\,\xi^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{5,1} x^2 8{,}9c\,\mathrm{d}x = 8{,}67\\
\mathrm{D}^2\,\xi &= \mathrm{E}\,\xi^2 - \mathrm{E}^2\,\xi = 8{,}67 - 2{,}55^2 = 2{,}1675.
\end{aligned}$$

Hasonlóan

$$\begin{aligned}
f_\eta(y) &= \int_{5,1-y}^{5,1} c\,\mathrm{d}x = cy, \text{ ha } 0 < y \leq 5{,}1\\
f_\eta(y) &= \int_{0}^{5,1} c\,\mathrm{d}x = 5{,}1c, \text{ ha } 5{,}1 < y \leq 8{,}9\\
f_\eta(y) &= \int_{0}^{14-y} c\,\mathrm{d}x = 14c - cy, \text{ ha } 8{,}9 < y \leq 14
\end{aligned}$$

minden más esetben $f_\eta(y) = 0$. Így

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\,\eta &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_\eta(y)\,\mathrm{d}y = \int_{0}^{5,1} cy^2\,\mathrm{d}y + \int_{5,1}^{8,9} 5{,}1cy\,\mathrm{d}y + \int_{8,9}^{14} (14cy - cy^2)\,\mathrm{d}y = 7\\
\mathrm{E}\,\eta^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_\eta(y)\,\mathrm{d}y = \int_{0}^{5,1} cy^3\,\mathrm{d}y + \int_{5,1}^{8,9} 5{,}1cy^2\,\mathrm{d}y + \int_{8,9}^{14} (14cy^2 - cy^3)\,\mathrm{d}y \approx 57{,}7683\\
\mathrm{D}^2\,\eta &= \mathrm{E}\,\eta^2 - \mathrm{E}^2\,\eta \approx 8{,}7683.
\end{aligned}$$

Az 5.25. tétel alapján

$$\mathrm{E}(\xi\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{0}^{5{,}1} \int_{5{,}1-x}^{14-x} xyc\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 15{,}6825,$$

így

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(\xi,\eta) &= \mathrm{E}(\xi\eta) - \mathrm{E}\,\xi\,\mathrm{E}\,\eta = -2{,}1675 \\ \operatorname{corr}(\xi,\eta) &= \frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\mathrm{D}\,\xi\,\mathrm{D}\,\eta} \approx -0{,}4972. \end{aligned}$$

7. fejezet

Nevezetes eloszlások

7.1. Karakterisztikus eloszlás

7.1. Definíció

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ egy valószínűségi mező. Az $A \in \mathcal{F}$ esemény *indikátorváltozójának* az

$$\mathrm{I}_A \colon \Omega \to \mathbb{R}, \quad \mathrm{I}_A(\omega) := \begin{cases} 1, & \text{ha } \omega \in A, \\ 0, & \text{ha } \omega \notin A, \end{cases}$$

valószínűségi változót nevezzük.

Az indikátorváltozó értéke tehát 1, ha az A esemény bekövetkezett, ellenkező esetben 0. Az indikátorváltozó valóban valószínűségi változó, ugyanis

$$\{\mathrm{I}_A < x\} = \begin{cases} \Omega, & \text{ha } x > 1, \\ \overline{A}, & \text{ha } 0 < x \leq 1, \\ \emptyset, & \text{ha } x \leq 0. \end{cases}$$

Az I_A eloszlása: $\mathrm{P}(\mathrm{I}_A = 1) = \mathrm{P}(A)$ és $\mathrm{P}(\mathrm{I}_A = 0) = \mathrm{P}(\,\overline{A}\,)$.

7.2. Definíció

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ egy valószínűségi mező, továbbá I_A az $A \in \mathcal{F}$ esemény indikátorváltozója. Ekkor I_A eloszlását $\mathrm{P}(A)$ paraméterű *karakterisztikus* vagy *Bernoulli-eloszlásnak* nevezzük.

7.3. Tétel

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező, $A \in \mathcal{F}$ és $p := \mathrm{P}(A)$. Ekkor $\mathrm{E}(\mathrm{I}_A) = p$ és $\mathrm{D}^2(\mathrm{I}_A) = p(1-p)$.

Bizonyítás. $\mathrm{E}(\mathrm{I}_A) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$, továbbá $\mathrm{D}^2(\mathrm{I}_A) = \mathrm{E}\left(\mathrm{I}_A^2\right) - \mathrm{E}^2(\mathrm{I}_A) = \mathrm{E}\left(\mathrm{I}_A^2\right) - p^2 = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1-p) - p^2 = p(1-p)$.

7.2. Binomiális eloszlás

7.4. Feladat. Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ független, p paraméterű karakterisztikus eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg $\xi_1 + \dots + \xi_n$ eloszlását!

Megoldás. Jelölje B_k $(k = 0, 1, \dots, n)$ azon rendezett szám n-esek halmazát, melyekben k darab 1 és $n-k$ darab 0 található. Ekkor tetszőleges $(x_1, \dots, x_n) \in B_k$ esetén, a függetlenség miatt

$$\mathrm{P}(\xi_1 = x_1, \dots, \xi_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(\xi_i = x_i) = p^k (1-p)^{n-k},$$

hiszen $\mathrm{P}(\xi_i = 1) = p$ és $\mathrm{P}(\xi_i = 0) = 1 - p$. Így

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}(\xi_1 + \dots + \xi_n = k) = \mathrm{P}\Big((\xi_1, \dots, \xi_n) \in B_k\Big) = \\ &= \sum_{(x_1,\dots,x_n) \in B_k} \mathrm{P}(\xi_1 = x_1, \dots, \xi_n = x_n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \end{aligned}$$

hiszen B_k-nak $\binom{n}{k}$ darab eleme van.

7.5. Definíció

Legyen ξ diszkrét valószínűségi változó, $n \in \mathbb{N}$, $R_\xi := \{0, 1, \dots, n\}$ és $0 < p < 1$. Ha minden $k \in R_\xi$ esetén

$$\mathrm{P}(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

akkor ξ-t n-ed rendű p paraméterű *binomiális eloszlású* valószínűségi változónak nevezzük.

7.6. *Megjegyzés.* A gyakoriság a 3.6. tétel szerint binomiális eloszlású. Példaként tekintsük a következő kísérletet. Legyen egy urnában 3 darab golyó, egy piros és két fehér. Vegyünk ki az urnából véletlenszerűen egy golyót, majd tegyük vissza. Ezt ismételjük meg tízszer. Legyen ξ azon esetek száma, amikor pirosat vettünk ki. Ez egy úgynevezett *visszatevéses mintavétel*. Ekkor ξ gyakoriságot jelöl, így ez 10-ed rendű $\frac{1}{3}$ paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó. Tehát például annak a valószínűsége, hogy a 10 esetből pontosan kétszer választottunk piros golyót

$$\mathrm{P}(\xi = 2) = \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^8.$$

Azt is vegyük észre, hogy az elsőrendű binomiális eloszlás a karakterisztikus eloszlással egyezik meg!

7.7. Tétel

Ha ξ egy n-ed rendű p paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó, akkor $\mathrm{E}\,\xi = np$ és $\mathrm{D}^2\,\xi = np(1-p)$.

Bizonyítás. Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ független, p paraméterű karakterisztikus eloszlású valószínűségi változók. Ekkor $\xi_1 + \cdots + \xi_n$ azonos eloszlású ξ-vel, így

$$\mathrm{E}\,\xi = \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}\,\xi_i = \sum_{i=1}^{n} p = np,$$

$$\mathrm{D}^2\,\xi = \mathrm{D}^2\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{D}^2\,\xi_i = \sum_{i=1}^{n} p(1-p) = np(1-p).$$

7.3. Poisson-eloszlás

A következő tételben a binomiális eloszlás határeloszlását adjuk meg bizonyos feltétellel.

7.8. Tétel

Legyen p_n olyan számsorozat, melyre np_n konvergens. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

ahol $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} np_n$ és $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

Bizonyítás. Ismert, hogy ha egy a_n sorozat konvergens és határértéke a, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n = e^a.$$

Így

$$\lim_{n\to\infty} (1-p_n)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-np_n}{n}\right)^n = e^{-\lambda}.$$

Másrészt

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} np_n \cdot \frac{1}{n} = \lambda \cdot 0 = 0,$$

melyből

$$\lim_{n\to\infty} (1-p_n)^{-k} = 1,$$

vagyis

$$\lim_{n\to\infty} (1-p_n)^{n-k} = \lim_{n\to\infty} (1-p_n)^n (1-p_n)^{-k} = e^{-\lambda}.$$

Mindezekből kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(np_n)^k}{k!} \cdot \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

7.9. Definíció

Legyen ξ diszkrét valószínűségi változó és $R_\xi := \{0, 1, 2, \dots\}$. Ha minden $k \in R_\xi$ esetén

$$\mathrm{P}(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

ahol $\lambda > 0$, akkor ξ-t λ paraméterű *Poisson-eloszlású* valószínűségi változónak nevezzük.

A Poisson-eloszlás valóban eloszlás, ugyanis

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1.$$

7.10. Tétel

Legyen ξ egy $\lambda > 0$ paraméterű Poisson-eloszlású valószínűségi változó. Ekkor $\mathrm{E}\,\xi = \mathrm{D}^2\,\xi = \lambda$.

Bizonyítás. Az 5.15. tétel alapján

$$\mathrm{E}\,\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{u=0}^{\infty} \frac{\lambda^u}{u!} = e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} = \lambda.$$

Másrészt

$$\mathrm{E}\,\xi^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(k(k-1) + k\Big) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} +$$
$$+ e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \lambda^2 \sum_{u=0}^{\infty} \frac{\lambda^u}{u!} + e^{-\lambda} \lambda \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\lambda^v}{v!} = \lambda^2 + \lambda.$$

A levezetésben az $u = k - 2$ és $v = k - 1$ helyettesítéseket vezettük be. Így $\mathrm{D}^2\,\xi = \mathrm{E}\,\xi^2 - \mathrm{E}^2\,\xi = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$.

7.11. *Megjegyzés.* A 7.8. tétel szerint nagy n és kis p esetén az n-edrendű p paraméterű binomiális eloszlást jól közelíti a $\lambda = np$ paraméterű Poisson-eloszlás. Például, ha 1000 lövést adunk le egy célra, és minden lövés egymástól függetlenül 0,004 valószínűséggel talál, akkor mi annak a valószínűsége, hogy pontosan 3-szor találunk célba? A találatok száma binomiális eloszlású ($n = 1000, p = 0{,}004, k = 3$), így ξ-vel jelölve a találatok számát $\mathrm{P}(\xi = 3) = \binom{1000}{3} \cdot 0{,}004^3 \cdot 0{,}996^{997} \approx 0{,}1956$. Ezt körülményes kiszámolni, de most használhatjuk a Poisson-eloszlással való közelítést. Mivel $\lambda = np = 4$, ezért $\mathrm{P}(\xi = 3) \approx \frac{4^3}{3!} e^{-4} \approx 0{,}1954$.

Ha az előző példában $n = 1000$, $p = 0{,}996$ és $k = 997$, akkor már nem alkalmazható a $\lambda = np$ paraméterű Poisson-eloszlású közelítés, hiszen p közel 1. A 7.8. tétel azonban ilyenkor is alkalmazható, ugyanis az, hogy 997-szer találunk, azt jelenti, hogy 3-szor elhibáztuk a célt. A hibázás valószínűsége minden lövésnél $1 - p = 0{,}004$, ami már kicsi, így alkalmazhatjuk a $\lambda = n(1-p) = 4$ paraméterű Poisson-közelítést. Tehát η-val jelölve a hibázások számát,

$$\mathrm{P}(\xi = 997) = \binom{1000}{997} \cdot 0{,}996^{997} \cdot 0{,}004^3 = \mathrm{P}(\eta = 3) \approx \frac{4^3}{3!} e^{-4} \approx 0{,}1954.$$

7.4. Hipergeometrikus eloszlás

7.12. Feladat. Legyen N darab termék között M $(0 < M < N)$ selejtes. Az N termék közül válasszunk ki visszatevés nélkül n darab terméket $(n \le \min\{M, N-M\})$. Jelentse ξ a kiválasztott termékek között található selejtesek számát. Határozzuk meg ξ eloszlását!

Megoldás. Az $R_\xi := \{0, 1, \ldots, n\}$ és az összes esetek száma $\binom{N}{n}$. Hogy a kiválasztottak között pontosan k darab selejtes legyen, az $\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}$ módon valósulhat meg. Így

$$\mathrm{P}(\xi = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

7.13. Definíció

Legyen ξ valószínűségi változó és $R_\xi := \{0, 1, \ldots, n\}$, ahol $n \in \mathbb{N}$. Ha minden $k \in R_\xi$ esetén

$$\mathrm{P}(\xi = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}},$$

ahol az M és N egész számokra $0 < M < N$ és $n \le \min\{M, N-M\}$ áll fenn, akkor ξ-t *hipergeometrikus eloszlású* valószínűségi változónak nevezzük.

A bevezető feladatból látható, hogy a definíció korrekt, melyből következik, hogy

$$\binom{N}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}. \tag{7.1}$$

7.14. Tétel

Legyen ξ egy hipergeometrikus eloszlású valószínűségi változó N, M és n paraméterekkel. Ekkor $\mathrm{E}\,\xi = \frac{nM}{N}$ és $\mathrm{D}^2\,\xi = \frac{nM}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}$.

Bizonyítás. Az 5.14. tétel és (7.1) miatt

$$\mathrm{E}\,\xi = \sum_{k=0}^{n} k \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{M}{\binom{N}{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{(M-1)!}{(k-1)!\,(M-k)!}\binom{N-M}{n-k} =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{M}{\binom{N}{n}} \sum_{k=1}^{n} \binom{M-1}{k-1}\binom{N-M}{n-k} = \\
&= \frac{M}{\binom{N}{n}} \sum_{u=0}^{n-1} \binom{M-1}{u}\binom{N-1-(M-1)}{n-1-u} = \\
&= \frac{M}{\binom{N}{n}} \binom{N-1}{n-1} = \frac{M\frac{(N-1)!}{(n-1)!(N-n)!}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}} = \frac{Mn}{N}.
\end{aligned}
$$

Ebből

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}^2\,\xi &= \sum_{k=0}^{n} k^2 \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} - \left(\frac{nM}{N}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} Mk \frac{\binom{M-1}{k-1}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} - \left(\frac{nM}{N}\right)^2 = \\
&= M\sum_{u=0}^{n-1}(u+1)\frac{\binom{M-1}{u}\binom{N-1-(M-1)}{n-1-u}}{\binom{N}{n}} - \left(\frac{nM}{N}\right)^2 = \\
&= \frac{M\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}\left(\sum_{u=0}^{n-1} u\frac{\binom{M-1}{u}\binom{N-1-(M-1)}{n-1-u}}{\binom{N-1}{n-1}} + \sum_{u=0}^{n-1}\frac{\binom{M-1}{u}\binom{N-1-(M-1)}{n-1-u}}{\binom{N-1}{n-1}}\right) - \\
&\quad - \left(\frac{nM}{N}\right)^2 = \frac{Mn}{N}\left(\frac{(M-1)(n-1)}{N-1} + 1\right) - \left(\frac{nM}{N}\right)^2 = \\
&= \frac{Mn}{N}\left(\frac{(M-1)(n-1)}{N-1} + 1 - \frac{nM}{N}\right) = \frac{Mn}{N}\cdot\frac{(N-M)(N-n)}{N(N-1)} = \\
&= \frac{Mn}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}.
\end{aligned}
$$

A bizonyításban $u = k-1$ helyettesítést alkalmaztunk.

7.15. Tétel

Legyen $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, $p \in \mathbb{R}$, továbbá $\langle M_N \rangle \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ olyan sorozat, melyre

$$\lim_{N\to\infty} \frac{M_N}{N} = p$$

teljesül. Ekkor

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\binom{M_N}{k}\binom{N-M_N}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Bizonyítás. A továbbiakban az egyszerűség kedvéért M_N helyett csak M-et írunk. Azonos átalakításokkal kapjuk, hogy

$$\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\frac{M!}{k!(M-k)!}\cdot\frac{(N-M)!}{(n-k)!(N-M-n+k)!}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}} =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \cdot \frac{M!}{(M-k)!} \cdot \frac{\frac{(N-M)!}{(N-M-n+k)!}}{\frac{N!}{(N-n)!}} = \\
&= \binom{n}{k} \frac{M(M-1)\cdots(M-k+1)}{N(N-1)\cdots(N-k+1)} \cdot \frac{\frac{(N-M)!}{(N-M-n+k)!}}{\frac{(N-k)!}{(N-n)!}} = \\
&= \binom{n}{k} \underbrace{\frac{M}{N}\frac{M-1}{N-1}\cdots\frac{M-k+1}{N-k+1}}_{k \text{ darab tényező}} \cdot \underbrace{\frac{N-M}{N-k}\frac{N-M-1}{N-k-1}\cdots\frac{N-M-n+k+1}{N-n+1}}_{n-k \text{ darab tényező}}.
\end{aligned}
$$

Ha t konstans, akkor

$$\lim_{N\to\infty} \frac{M-t}{N-t} = \lim_{N\to\infty} \frac{\frac{M}{N} - \frac{t}{N}}{1 - \frac{t}{N}} = p,$$

illetve

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N-M-t}{N-k-t} = \lim_{N\to\infty} \frac{1 - \frac{M}{N} - \frac{t}{N}}{1 - \frac{k}{N} - \frac{t}{N}} = 1-p.$$

Mindezeket felhasználva adódik a tétel.

7.16. *Megjegyzés.* Ez a tétel azt jelenti, hogy nagy N és M esetén a $p = \frac{M}{N}$ paraméterű n-ed rendű binomiális eloszlást jól közelíti a hipergeometrikus eloszlás. Például legyen 10 000 termék között 10 % selejt. A termékek közül 10 darabot válasszunk ki véletlenszerűen visszatevés nélkül. Ha ξ a 10 termék közötti selejtesek számát jelöli, akkor az a 7.12. feladat alapján $N = 10\,000$, $M = 1000$, $n = 10$ paraméterű hipergeometrikus eloszlású valószínűségi változó. Azaz például annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott 10 termék között pontosan 3 selejtes van

$$\mathrm{P}(\xi = 3) = \frac{\binom{1000}{3} \cdot \binom{9000}{7}}{\binom{10\,000}{10}} \approx 0{,}0573.$$

Ezt körülményes kiszámolni, de mivel nagy az N és az M is, ezért alkalmazhatjuk a binomiális közelítést. Tehát

$$\mathrm{P}(\xi = 3) \approx \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{M}{N}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right)^{n-k} = \binom{10}{3} \cdot 0{,}1^3 \cdot 0{,}9^7 \approx 0{,}0574.$$

Tehát ebben az esetben a binomiális közelítésnél csak a 4. tizedesjegytől tapasztalható eltérés.

7.5. Geometriai eloszlás

Az 5.17. feladatban egy olyan valószínűségi változót adtunk meg, melynek értékkészlete $\mathbb{N}$ és eloszlása $\mathrm{P}(\xi = k) = p(1-p)^{k-1}$ $(k \in \mathbb{N})$ volt.

7.17. Definíció

Legyen ξ olyan diszkrét valószínűségi változó, melyre $R_\xi = \mathbb{N}$. Ha minden $k \in R_\xi$ esetén

$$\mathrm{P}(\xi = k) = p(1-p)^{k-1},$$

ahol $0 < p < 1$, akkor ξ-t p paraméterű *geometriai eloszlású* valószínűségi változónak nevezzük.

Az 5.17. feladatból, de a következőből is kiderül, hogy az előző definíció korrekt.

$$\sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1} = 1.$$

7.18. Tétel

Legyen ξ egy p paraméterű geometriai eloszlású valószínűségi változó. Ekkor

$$\mathrm{E}\,\xi = \frac{1}{p} \quad \text{és} \quad \mathrm{D}^2\,\xi = \frac{1-p}{p^2}.$$

Bizonyítás. Legyen $q := 1-p$. Az 5.15. tétel miatt

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\,\xi &= \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}(q^k) = p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right) = \\ &= p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\left(\frac{q}{1-q}\right) = p\frac{1-q+q}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}.\end{aligned}$$

A bizonyításban felhasználtuk, hogy a $\sum\limits_{1}^{\infty} q^k$ hatványsor konvergenciasugara 1, így q lehetséges értékei esetén a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ összegfüggvény differenciálható.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\,\xi^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2pq^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty} k^2q^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}(kq^k) = p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\left(\sum_{k=1}^{\infty} kq^k\right) = \\ &= p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\left(\frac{q}{p}\sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1}\right) = p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\left(\frac{q}{p}\,\mathrm{E}\,\xi\right) = p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\left(\frac{q}{p^2}\right) = \\ &= p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\left(\frac{q}{(1-q)^2}\right) = \frac{1+q}{p^2},\end{aligned}$$

A levezetésben felhasználtuk, hogy a $\sum\limits_{1}^{\infty} kq^k$ hatványsor konvergenciasugara 1. Így

$$\mathrm{D}^2\,\xi = \mathrm{E}\,\xi^2 - \mathrm{E}^2\,\xi = \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

7.6. Egyenletes eloszlás

7.19. Feladat. Legyen $\Omega = [a, b]$ $(a, b \in \mathbb{R},\ a < b)$, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ geometriai valószínűségi mező és $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $\xi(\omega) = \omega$. Határozzuk meg ξ eloszlásfüggvényét!

Megoldás. Ha $x < a$, akkor $F_\xi(x) = \mathrm{P}(\xi < x) = 0$, illetve ha $x > b$, akkor $F_\xi(x) = \mathrm{P}(\xi < x) = 1$. Most legyen $a \le x \le b$. Ekkor $F_\xi(x) = \mathrm{P}(\xi < x) = \frac{x-a}{b-a}$. Az F_ξ folytonos és két pont kivételével mindenhol differenciálható, így ξ abszolút folytonos, továbbá $f_\xi(x) = F'_\xi(x) = \frac{1}{b-a}$, ha $a < x < b$, míg $f_\xi(x) = F'_\xi(x) = 0$ minden más esetben.

7.20. Definíció

Legyen ξ abszolút folytonos valószínűségi változó, $a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$. Ha ξ sűrűségfüggvénye

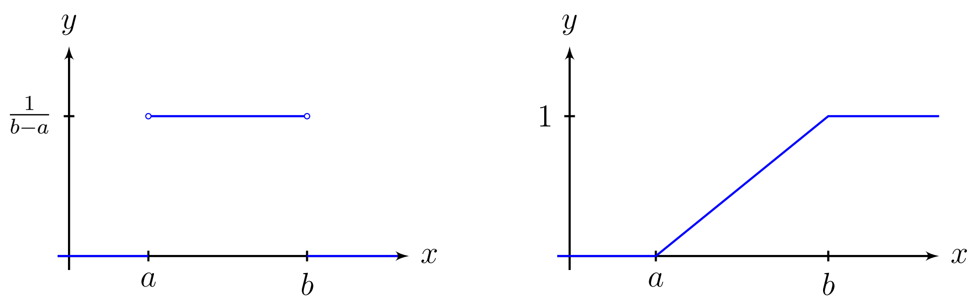
$$f_\xi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } a < x < b, \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

akkor ξ-t *egyenletes eloszlású* valószínűségi változónak nevezzük az (a, b) intervallumon.

7.21. Tétel

Legyen ξ egyenletes eloszlású valószínűségi változó az (a, b) intervallumon. Ekkor ξ eloszlásfüggvénye

$$F_\xi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{ha } a < x < b, \\ 1, & \text{ha } x \ge b. \end{cases}$$



Egyenletes eloszlás sűrűség- és eloszlásfüggvénye

7.22. Tétel

Legyen ξ egyenletes eloszlású valószínűségi változó az (a, b) intervallumon. Ekkor $\mathrm{E}\,\xi = \frac{a+b}{2}$ és $\mathrm{D}^2\,\xi = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Bizonyítás. A várható érték véges, mivel

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_\xi(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b |x| \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\int_a^b |x|\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}$$

teljesül. Így

$$\mathrm{E}\,\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b x\frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$

Másrészt

$$\mathrm{E}\,\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b x^2\frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)},$$

így

$$\mathrm{D}^2\,\xi = \mathrm{E}\,\xi^2 - \mathrm{E}^2\,\xi = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

7.7. Exponenciális eloszlás

Vizsgáljuk egy üvegpohár élettartamát! Mivel az üveg nem öregszik, ezért csak a véletlen törések határozzák meg az élettartamot. Vagyis ha x ideig nem törik el a pohár, akkor további legalább y ideig ugyanakkora valószínűséggel marad ép, mintha akkor gyártották volna, azaz

$$\mathrm{P}(\xi \geq x+y \mid \xi \geq x) = \mathrm{P}(\xi \geq y) \quad \text{minden } x, y > 0 \text{ esetén},$$

ahol ξ az élettartam. Ezt a tulajdonságot *örökifjú tulajdonságnak* nevezzük.

7.23. Feladat. Határozzuk meg azon folytonos eloszlásfüggvényű ξ valószínűségi változók körét, melyek rendelkeznek az örökifjú tulajdonsággal!

Megoldás. Legyen $G(x) := 1 - F_\xi(x)$. Ekkor minden $x, y > 0$ esetén

$$G(x+y) = G(x)G(y),$$

melyből következik, hogy

$$G(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = G(x_1)G(x_2)\cdots G(x_n)$$

minden $n \in \mathbb{N}$ és $x_1, \ldots, x_n > 0$ esetén. Legyen $x_i = \frac{1}{n}$ és $a := G(1)$. Ekkor $a =$ $= G^n(\frac{1}{n})$, azaz $G(\frac{1}{n}) = a^{\frac{1}{n}}$. Ebből $x_i = \frac{1}{m}$ $(m \in \mathbb{N})$ választással azt kapjuk, hogy

$G(\frac{n}{m}) = G^n(\frac{1}{m}) = a^{\frac{n}{m}}$, azaz $G(x) = a^x$ minden pozitív racionális x esetén. De a G és az exponenciális függvény folytonossága miatt ez csak úgy lehet, ha

$$G(x) = a^x$$

minden $x > 0$ esetén. F_ξ eloszlásfüggvény, ezért $0 \le a \le 1$. Tegyük fel, hogy $a = 0$. Ekkor $G(x) = 0^x = 0$ minden $x > 0$ esetén, ami ellentmond G folytonosságának, hiszen $G(0) = 1 - \mathrm{P}(\xi < 0) = 1$. Másrészt, ha $a = 1$ lenne, akkor $G(x) = 1^x = 1$ minden $x > 0$ esetén, ami ellentmond (F2)-nek. Így $0 < a < 1$, melyből következik, hogy egyértelműen létezik $\lambda > 0$, hogy $a = e^{-\lambda}$. Tehát ekkor

$$F_\xi(x) = 1 - e^{-\lambda x},$$

ha $x > 0$. Másrészt, ha $x \le 0$, akkor $F_\xi(x) = \mathrm{P}(\xi < 0) = \mathrm{P}(\emptyset) = 0$.

Mivel F_ξ egy pont kivételével mindenhol differenciálható, ezért ξ abszolút folytonos, továbbá

$$f_\xi(x) = F'_\xi(x) = \lambda e^{-\lambda x},$$

ha $x > 0$ és $f_\xi(x) = F'_\xi(x) = 0$, ha $x \le 0$.

7.24. Definíció

Legyen ξ abszolút folytonos valószínűségi változó és $\lambda > 0$. Ha ξ sűrűségfüggvénye

$$f_\xi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0, \end{cases}$$

akkor ξ-t λ paraméterű *exponenciális eloszlású* valószínűségi változónak nevezzük.

Ez valóban sűrűségfüggvény, hiszen $f_\xi(x) \ge 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, továbbá

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} = -\lim_{x\to\infty} e^{-\lambda x} + 1 = 1.$$

7.25. Tétel

Legyen $\lambda > 0$ és ξ egy λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Ekkor ξ eloszlásfüggvénye

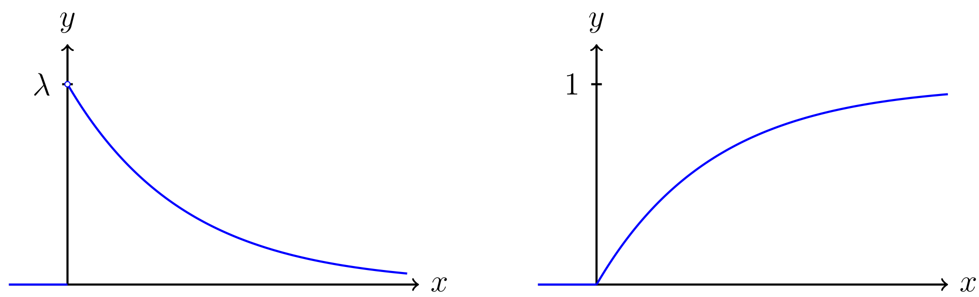
$$F_\xi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

Bizonyítás. Ha $x \le 0$, akkor

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0$$

teljesül, másrészt ha $x > 0$, akkor

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}.$$



Exponenciális eloszlás sűrűség- és eloszlásfüggvénye

7.26. Tétel

Legyen $\lambda > 0$ és ξ egy λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Ekkor $\mathrm{E}\,\xi = \frac{1}{\lambda}$ és $\mathrm{D}^2\,\xi = \frac{1}{\lambda^2}$.

Bizonyítás. A következő integrált parciális integrálással és L'Hospital-szabállyal számoljuk ki. Legyen $f(x) = x$ és $g'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$. Ekkor $f'(x) = 1$ és $g(x) = -e^{-\lambda x}$, így

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_\xi(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{\lambda x}} + \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} = -\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\lambda e^{\lambda x}} + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}.$$

Ebből következik, hogy $\mathrm{E}\,\xi$ véges és

$$\mathrm{E}\,\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}.$$

A következőkben parciális integrálást alkalmazunk, melyben $f(x) = x^2$ és $g'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$. Ekkor $f'(x) = 2x$ és $g(x) = -e^{-\lambda x}$, így

$$\mathrm{E}\,\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-x^2 e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2xe^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{\lambda x}} + \frac{2}{\lambda}\int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = -\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\lambda e^{\lambda x}} + \frac{2}{\lambda}\mathrm{E}\,\xi = -\lim_{x\to\infty} \frac{2}{\lambda^2 e^{\lambda x}} + \frac{2}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Ebből

$$\mathrm{D}^2\,\xi = \mathrm{E}\,\xi^2 - \mathrm{E}^2\,\xi = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

7.8. Cauchy-eloszlás

7.27. Feladat. A Descartes-féle koordinátasíkra leejtünk egy egyenest. Tegyük fel, hogy ennek az α irányszöge egyenletes eloszlású a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ intervallumon. Határozzuk meg az egyenes η-val jelölt meredekségének az eloszlás- és sűrűségfüggvényét! Adja meg a $\xi = \mu + \sigma\eta$ eloszlás- és sűrűségfüggvényét is, ahol $\mu \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$.

Megoldás.

$$F_\eta(x) = \mathrm{P}(\eta < x) = \mathrm{P}(\operatorname{tg}\alpha < x) = \mathrm{P}(\alpha < \operatorname{arctg} x) = \\ = \frac{\operatorname{arctg} x - (-\frac{\pi}{2})}{\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x.$$

Mivel ez differenciálható függvény, ezért η abszolút folytonos, továbbá

$$f_\eta(x) = F'_\eta(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Másrészt

$$F_\xi(x) = \mathrm{P}(\mu + \sigma\eta < x) = \mathrm{P}\Big(\eta < \frac{x-\mu}{\sigma}\Big) = F_\eta\Big(\frac{x-\mu}{\sigma}\Big) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\Big(\frac{x-\mu}{\sigma}\Big),$$

így

$$f_\xi(x) = F'_\xi(x) = \frac{\sigma}{\pi\sigma^2 + \pi(x-\mu)^2}.$$

7.28. Definíció

Ha a ξ abszolút folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f_\xi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_\xi(x) = \frac{\sigma}{\pi\sigma^2 + \pi(x-\mu)^2},$$

ahol $\mu \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$, akkor ξ-t μ *helyparaméterű* és σ *skálaparaméterű Cauchy-eloszlású* valószínűségi változónak nevezzük. Ha $\mu = 0$ és $\sigma = 1$, akkor *standard Cauchy-eloszlásról* beszélünk.

A 7.27. feladat megoldása értelmében f_ξ valóban sűrűségfüggvény, továbbá teljesül a következő két tétel.

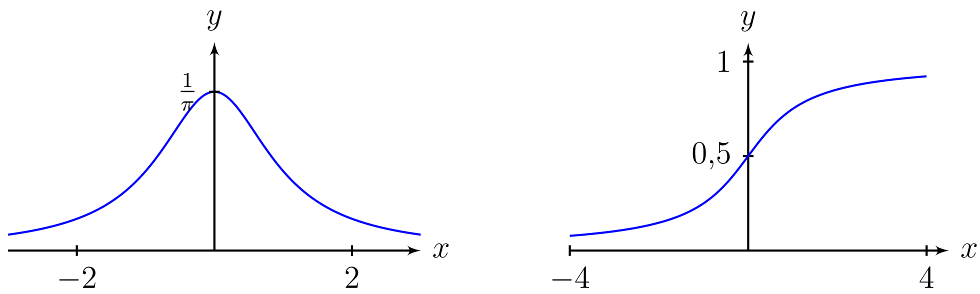
7.29. Tétel

Ha ξ μ helyparaméterű és σ skálaparaméterű Cauchy-eloszlású valószínűségi változó, akkor az eloszlásfüggvénye

$$F_\xi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F_\xi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\Big(\frac{x-\mu}{\sigma}\Big).$$

7.30. Tétel

Ha ξ standard Cauchy-eloszlású valószínűségi változó, $\mu \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$, akkor $\mu + \sigma\xi$ Cauchy-eloszlású μ és σ paraméterekkel.



Standard Cauchy-eloszlás sűrűség- és eloszlásfüggvénye

7.31. Tétel

Cauchy-eloszlású valószínűségi változónak nem létezik várható értéke.

Bizonyítás. Legyen ξ standard Cauchy-eloszlású valószínűségi változó. Ekkor

$$\int_0^\infty x f_\xi(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty x\frac{1}{\pi(1+x^2)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\Big[\ln\big(1+x^2\big)\Big]_0^\infty = \infty,$$

és

$$\int_{-\infty}^0 (-x) f_\xi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^0 \frac{-x}{\pi(1+x^2)}\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{2\pi}\int_{-\infty}^0 \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{2\pi}\Big[\ln\big(1+x^2\big)\Big]_{-\infty}^0 = \infty.$$

Ezért az 5.16. tétel alapján nem létezik ξ-nek várható értéke, melyből következik a tétel.

7.32. *Megjegyzés.* A μ helyparaméter az úgynevezett *mediánnal* egyenlő, azaz

$$\mathrm{P}(\xi < \mu) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\Big(\frac{\mu-\mu}{\sigma}\Big) = \frac{1}{2}.$$

7.9. Normális eloszlás

7.33. Jelölés

Vezessük be a következő jelölést, melynek kiemelt szerepe lesz a valószínűségszámításban:

$$\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független, azonos eloszlású, véges pozitív szórású valószínűségi változók. Ekkor az $S_n := \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$ standardizáltjának a határeloszlása egy olyan abszolút folytonos valószínűségi változó eloszlásával egyezik meg, melynek sűrűségfüggvénye φ, azaz minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\frac{S_n - \mathrm{E}\, S_n}{\mathrm{D}\, S_n} < x\right) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ez az úgynevezett centrális határeloszlási tétel, melyről később még lesz szó. Az eredmény meglepő, hiszen bármely véges pozitív szórású eloszlás esetén ugyanahhoz a határeloszláshoz jutunk az előző módon.

7.34. Definíció

A ξ abszolút folytonos valószínűségi változót *standard normális eloszlásúnak* nevezzük, ha a sűrűségfüggvénye φ.

A φ valóban sűrűségfüggvény. A bizonyításhoz legyen

$$W := \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Mivel

$$W^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-y^2}{2}}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

így $x := r\cos\omega$ és $y := r\sin\omega$ $(0 \le r < \infty,\ 0 \le \omega \le 2\pi)$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$W^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} re^{-\frac{r^2}{2}}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}r = \int_0^{\infty} re^{-\frac{r^2}{2}}\,\mathrm{d}r = \left[-e^{-\frac{r^2}{2}}\right]_0^{\infty} = 1.$$

A helyettesítés során felhasználtuk, hogy a Jacobi-determináns

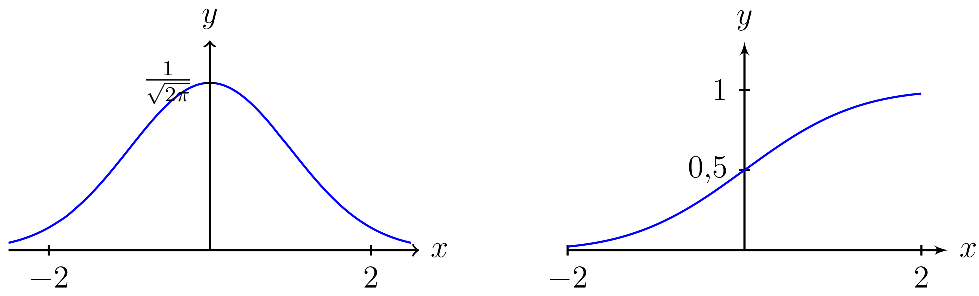
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \omega} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \omega} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\omega & -r\sin\omega \\ \sin\omega & r\cos\omega \end{vmatrix} = r\cos^2\omega + r\sin^2\omega = r.$$

Mivel $\varphi(x) > 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, ezért $W > 0$. Ebből $W = 1$.

7.35. Jelölés

Standard normális eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvényét Φ-vel jelöljük, azaz

$$\Phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t.$$



Standard normális eloszlás sűrűség- és eloszlásfüggvénye

7.36. Tétel

A standard normális eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvényére illetve a sűrűségfüggvényére minden $x \in \mathbb{R}$ esetén teljesülnek a következők:

(1) $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

(2) $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

(3) $\Phi(0) = 0{,}5$.

(4) Φ szigorúan monoton növekedő és mindenhol differenciálható.

(5) φ a $(-\infty, 0]$ intervallumon szigorúan monoton növekedő, a $[0, \infty)$ intervallumon pedig szigorúan monoton csökkenő függvény.

Bizonyítás. (1) Az állítást behelyettesítéssel ellenőrizhetjük.

(2) Az előző pont miatt

$$\Phi(-x) = \int_{-\infty}^{-x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x}^{\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 1 - \Phi(x).$$

(3) Az előző pont következménye $x = 0$ választással.

(4) A definícióból $\varphi(t) > 0$ minden $t \in \mathbb{R}$ esetén. Ezért ha $x_1 < x_2$, akkor

$$\int_{x_1}^{x_2} \varphi(t)\,\mathrm{d}t > 0.$$

Ebből pedig

$$\Phi(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t < \int_{-\infty}^{x_1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x_1}^{x_2} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x_2} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \Phi(x_2).$$

A differenciálhatóság abból következik, hogy φ folytonos.

(5) Az állítás a természetes alapú exponenciális függvény szigorúan monoton növekedéséből következik.

7.37. *Megjegyzés.* A Φ nem elemi függvény, azaz nincs zárt alakja. Kiszámolni egy adott helyen a helyettesítési értékét a Taylor-sorával lehet, amit a következő módon határozhatunk meg.

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{t^2}{2}\right)^k}{k!} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k k!} \int_{-\infty}^{x} t^{2k} \, \mathrm{d}t =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k k!} \left(\frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \lim_{y\to-\infty} \frac{y^{2k+1}}{2k+1} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k (2k+1) k!} x^{2k+1} -$$
$$- \lim_{y\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k (2k+1) k!} y^{2k+1}.$$

Ezt $x = 0$-ra felírva kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2} = \Phi(0) = -\lim_{y\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k (2k+1) k!} y^{2k+1},$$

melyből

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k (2k+1) k!} x^{2k+1}.$$

A 7.36. tétel (4) pontja lehetővé teszi, hogy a Φ előző képlettel számolt közelítő értékeit táblázatba rendezzük. (Lásd 102. oldal.) A (2) pont szerint ebben a táblázatban elég a pozitív x-ek helyettesítési értékeit feltüntetni.

Megemlítjük még a $\Phi(x)$ egy egyszerű közelítő formuláját. Johnson és Kotz 1970-ben bizonyították, hogy az

$$1 - 0{,}5(1 + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4)^{-4}$$

kifejezéssel $x \geq 0$ esetén $2{,}5 \cdot 10^{-4}$-nél kisebb hibával közelíthető $\Phi(x)$, ahol

$$a = 0{,}196854, \ b = 0{,}115194, \ c = 0{,}000344, \ d = 0{,}019527.$$

7.38. Tétel

Ha ξ standard normális eloszlású, akkor $\mathrm{E}\,\xi = 0$ és $\mathrm{D}^2\,\xi = 1$.

Bizonyítás. A ξ-nek véges a várható értéke, mert

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_0^{\infty} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}.$$

Az integrálásban felhasználtuk, hogy $|x| e^{\frac{-x^2}{2}}$ páros. Így $x\varphi(x)$ páratlansága miatt

$$\mathrm{E}\,\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x) \, \mathrm{d}x = 0.$$

Legyen $f(x) := x$ és $g'(x) := xe^{\frac{-x^2}{2}}$. Ekkor parciális integrálással

$$\mathrm{E}\,\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left[-xe^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^{\infty} - \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} -e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{\frac{x^2}{2}}} + \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{xe^{\frac{x^2}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = 1.$$

Ebből $\mathrm{D}^2\,\xi = \mathrm{E}\,\xi^2 - \mathrm{E}^2\,\xi = 1$.

7.39. Definíció

Legyen $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ és η standard normális eloszlású valószínűségi változó. Ekkor a $\xi := \sigma\eta + m$ valószínűségi változót m és σ paraméterű *normális eloszlásúnak* nevezzük.

A standard normális eloszlású valószínűségi változó $m = 0$ és $\sigma = 1$ paraméterű normális eloszlású.

7.40. Tétel

Legyen $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ és ξ egy m és σ paraméterű normális eloszlású valószínűségi változó. Ekkor ξ abszolút folytonos, továbbá minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$F_\xi(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) \quad \text{és} \quad f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right).$$

Bizonyítás. Legyen η standard normális eloszlású. Ekkor

$$F_\xi(x) = \mathrm{P}(\sigma\eta + m < x) = \mathrm{P}\left(\eta < \frac{x-m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right).$$

Ez mindenütt differenciálható, így ξ abszolút folytonos és

$$f_\xi(x) = F'_\xi(x) = \left(\frac{x-m}{\sigma}\right)'\Phi'\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right).$$

7.41. *Megjegyzés.* Az előző tételből következik, hogy ha ξ egy m és σ paraméterű normális eloszlású valószínűségi változó, akkor

$$f_\xi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

és

$$F_\xi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad F_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t.$$

7.42. Tétel

Legyen $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ és ξ egy m és σ paraméterű normális eloszlású valószínűségi változó. Ekkor $\mathrm{E}\,\xi = m$ és $\mathrm{D}^2\,\xi = \sigma^2$.

Bizonyítás. Legyen η standard normális eloszlású valószínűségi változó. Ekkor

$$\mathrm{E}\,\xi = \mathrm{E}(\sigma\eta + m) = \sigma\,\mathrm{E}\,\eta + m = m,$$

továbbá

$$\mathrm{D}^2\,\xi = \mathrm{D}^2(\sigma\eta + m) = \sigma^2\,\mathrm{D}^2\,\eta = \sigma^2.$$

7.43. Feladat. Egy gyár alkatrészeket készít. Ezek élettartama normális eloszlású valószínűségi változó 1170 óra várható értékkel és 100 óra szórással. A gyár az alkatrészekre garanciát vállal. Hány órás működésre szóljon a garancia, ha a gyár legfeljebb 5 % garanciaigényt kíván kielégíteni?

Megoldás. Ha t órára vállalnak garanciát, akkor a feladat szerint

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\xi < t) &\le 0{,}05 \\ F_\xi(t) &\le 0{,}05 \\ \Phi\left(\frac{t-1170}{100}\right) &\le 0{,}05 \\ 1 - \Phi\left(\frac{1170-t}{100}\right) &\le 0{,}05 \\ 0{,}95 &\le \Phi\left(\frac{1170-t}{100}\right). \end{aligned}$$

Ebből Φ szigorúan monoton növekedése és $\Phi(1{,}64) \approx 0{,}95$ alapján

$$1{,}64 \le \frac{1170-t}{100},$$

melyből $t \le 1006$, azaz legfeljebb 1006 órára szóljon a garancia.

8. fejezet

A valószínűségszámítás határérték-tételei

8.1. A nagy számok törvényei

A valószínűség fogalmának meghatározásakor a matematikai modellünkben feltételeztük a Bernoulli-féle tapasztalat alapján, hogy a valószínűség örökli a relatív gyakoriság legfontosabb tulajdonságait: az értéke nemnegatív, a biztos esemény valószínűsége 1 és σ-additív. Felmerül a kérdés, hogy elég-e csak ennyit feltételezni a valószínűségről? Azaz ez alapján megmutatható-e a modellünkben Bernoulli tapasztalata, miszerint egy esemény relatív gyakorisága a kísérletek számának növelésével egyre kisebb mértékben ingadozik az esemény valószínűsége körül? A modell akkor lesz jó, ha ez az eddigiek alapján bizonyítható tétel. Erről lesz szó ebben a szakaszban.

A következő definícióban először azt tisztázzuk, hogy mit jelent a modellünkben, hogy egy valószínűségi változó sorozat egyre kisebb mértékben ingadozik egy konstans körül.

8.1. Definíció

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ valószínűségi változók és $c \in \mathbb{R}$. Ha minden $\varepsilon > 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\Big(\big|\xi_n - c\big| \geq \varepsilon\Big) = 0$$

teljesül, akkor azt mondjuk, hogy ξ_n *sztochasztikusan konvergál* c-hez.

A továbblépéshez a következő tételre lesz szükségünk:

8.2. Tétel Csebisev-egyenlőtlenség

Ha ξ véges szórású valószínűségi változó, akkor minden $\varepsilon > 0$ esetén

$$\mathrm{P}\Big(|\xi - \mathrm{E}\,\xi| \geq \varepsilon\Big) \leq \frac{\mathrm{D}^2\,\xi}{\varepsilon^2}.$$

Bizonyítás. Legyen $c := \varepsilon^2$ és $\eta := (\xi - \mathrm{E}\,\xi)^2$. Ekkor c-re és η-ra teljesülnek a Markov-egyenlőtlenség (5.9. tétel) feltételei. Így

$$\varepsilon^2\,\mathrm{P}\Big(\big|\xi - \mathrm{E}\,\xi\big| \geq \varepsilon\Big) = \varepsilon^2\,\mathrm{P}\Big(\eta \geq \varepsilon^2\Big) \leq \mathrm{E}\,\eta = \mathrm{D}^2\,\xi.$$

8.3. Tétel Bernoulli-féle nagy számok törvénye

Legyen ϱ_n egy n-ed rendű p paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó. Ekkor minden $\varepsilon > 0$ esetén

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{\varrho_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}, \tag{8.1}$$

amiből következik, hogy $\frac{\varrho_n}{n}$ sztochasztikusan konvergál p-hez.

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ adott. Ekkor a Csebisev-egyenlőtlenség feltételeit $n\varepsilon$ és ϱ_n teljesítik, így

$$\mathrm{P}\Big(|\varrho_n - \mathrm{E}\,\varrho_n| \geq n\varepsilon\Big) \leq \frac{\mathrm{D}^2\,\varrho_n}{n^2\varepsilon^2}$$

teljesül. Másrészt $\mathrm{E}\,\varrho_n = np$ és $\mathrm{D}^2\,\varrho_n = np(1-p)$. Ezeket beírva

$$0 \leq \mathrm{P}\Big(|\varrho_n - np| \geq n\varepsilon\Big) = \mathrm{P}\left(\left|\frac{\varrho_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{np(1-p)}{n^2\varepsilon^2} = \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$

adódik. Ebből

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} = 0$$

miatt következik, hogy $\frac{\varrho_n}{n}$ sztochasztikusan konvergál p-hez.

8.4. *Megjegyzés.* Ha ϱ_n egy A esemény gyakorisága, ahol n a kísérletek száma, akkor ϱ_n binomiális eloszlású valószínűségi változó n-ed renddel és p paraméterrel, ahol p az A esemény valószínűsége (lásd a 7.6. megjegyzést). Így (8.1) erre is teljesül, azaz *egy esemény relatív gyakorisága sztochasztikusan konvergál az esemény valószínűségéhez*.

8.5. *Megjegyzés.* A Bernoulli-féle nagy számok törvényében akkor is tudunk felső becslést adni, ha p értéke nem ismert. Ugyanis $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ mindig teljesül, így

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{\varrho_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

A feladatokban gyakran használható a következő becslés, ami ekvivalens a (8.1) egyenlőtlenséggel:

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{\varrho_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

A Bernoulli-féle nagy számok törvényének jelentősége, hogy a bevezetésben leírt tapasztalatot fejezi ki. Vagyis a valószínűségszámításban, mint a véletlen jelenségeket leíró modellben, a valószínűség és a relatív gyakoriság hasonló kapcsolatban van, mint amit a tapasztalat mutat.

8.6. Feladat. Hány dobást kell végeznünk egy szabályos kockával, hogy a 6-os dobás valószínűségét a 6-os relatív gyakorisága legalább 0,9 valószínűséggel 0,01-nál kisebb hibával megközelítse? Oldjuk meg a feladatot akkor is, ha a kocka cinkelt, azaz a 6-os dobásának a valószínűségét nem ismerjük!

Megoldás. Szabályos kockánál a 6-os dobásának valószínűsége $p = \frac{1}{6}$. Így a Bernoulli-féle nagy számok törvénye és a 8.5. megjegyzés alapján

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{\varrho_n}{n} - p\right| < 0{,}01\right) \geq 1 - \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}{n \cdot 0{,}01^2} \geq 0{,}9$$

teljesül. Ebből következően $n \geq 13\,889$, azaz legalább 13 889-szer kell dobni. Ha a kocka cinkelt, akkor használjuk a $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ egyenlőtlenséget. Így

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{\varrho_n}{n} - p\right| < 0{,}01\right) \geq 1 - \frac{1}{4n \cdot 0{,}01^2} \geq 0{,}9,$$

melyből $n \geq 25\,000$ adódik.

A 7.4. feladatban láttuk, hogy független, azonos paraméterű karakterisztikus eloszlású valószínűségi változók összege binomiális eloszlású, így erre a Bernoulli-féle nagy számok törvénye teljesül. Vajon más, nem feltétlenül karakterisztikus eloszlású valószínűségi változók összegére mit állíthatunk?

8.7. Tétel A nagy számok gyenge törvénye

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ véges szórású, azonos eloszlású, páronként független valószínűségi változók, továbbá legyen $S_n := \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$. Ekkor minden $\varepsilon > 0$ esetén

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathrm{E}\,\xi_1\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{D}^2\,\xi_1}{n\varepsilon^2}$$

teljesül, melyből következik, hogy $\frac{S_n}{n}$ sztochasztikusan konvergál $\mathrm{E}\,\xi_1$-hez.

Bizonyítás. Az $\frac{S_n}{n}$ valószínűségi változóra teljesülnek a Csebisev-egyenlőtlenség feltételei, ezért

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathrm{E}\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{D}^2\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2}$$

teljesül. De

$$\mathrm{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathrm{E}\,\xi_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathrm{E}\,\xi_1 = \mathrm{E}\,\xi_1$$

és a páronkénti függetlenség miatt

$$\mathrm{D}^2\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\mathrm{D}^2\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \mathrm{D}^2\,\xi_i = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \mathrm{D}^2\,\xi_1 = \frac{1}{n}\mathrm{D}^2\,\xi_1,$$

így teljesül a tételben szereplő egyenlőtlenség. Mivel

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{D}^2\,\xi_1}{n\varepsilon^2} = 0,$$

ezért ebből következik, hogy $\frac{S_n}{n}$ sztochasztikusan konvergál $\mathrm{E}\,\xi_1$-hez.

8.8. *Megjegyzés.* Ha a nagy számok gyenge törvényében ξ_i egy rögzített A esemény indikátorváltozója és $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ függetlenek (nem páronként), akkor a Bernoulli-féle nagy számok törvényét kapjuk.

Hincsin bizonyította, hogy a nagy számok gyenge törvényében $\frac{S_n}{n}$ akkor is sztochasztikusan konvergál $\mathrm{E}\,\xi_1$-hez, ha a véges szórás létezése helyett csak a véges várható érték létezését feltételezzük.

A nagy számok gyenge törvénye alapján egy véges várható értékű valószínűségi változó több mérési eredményének számtani közepe a mérések számának növelésével a valószínűségi változó várható értéke körül ingadozik. Azaz várhatóan ezt az értéket közelíti meg az átlag. Ezt a törvényt a tapasztalat is megerősíti. Ez alapján neveztük el a várható értéket.

A következő tétel a gyenge törvénynél erősebb állítást fogalmaz meg.

8.9. Tétel A nagy számok Kolmogorov-féle erős törvénye

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független, azonos eloszlású, véges várható értékű valószínűségi változók. Ekkor $S_n := \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$ jelöléssel

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mathrm{E}\,\xi_1 \quad \text{m.b.}$$

teljesül.

Etemadi (1981) és *Petrov* (1987) eredményei alapján kiderült, hogy a nagy számok Kolmogorov-féle erős törvényének állítása páronkénti függetlenség esetén is igaz marad. Ezt nevezzük a *nagy számok Etemadi-féle erős törvényének*. Ebből bizonyítható a nagy számok gyenge törvénye, de fordítva nem. Ezért az „*erős*” illetve „*gyenge*” jelző.

A nagy számok Kolmogorov-féle erős törvényében, ha $\mathrm{E}\,\xi_1 = 0$ teljesül, akkor $\frac{S_n}{n}$ majdnem biztosan 0-hoz konvergál. Ezt az állítást *Marcinkiewicz* és *Zygmund* 1937-ben általánosították arra az esetre, amikor n helyett $n^{1/r}$ van a nevezőben, ahol $0 < r < 2$.

8.10. Tétel A nagy számok Marcinkiewicz – Zygmund-féle erős törvénye

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók és legyen $S_n := \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$.

(1) Ha $0 < r < 1$ és $\mathrm{E}\,|\xi_1|^r \in \mathbb{R}$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n^{1/r}} = 0 \quad \text{m.b.}$$

(2) Ha $1 \leq r < 2$, $\mathrm{E}\,|\xi_1|^r \in \mathbb{R}$ és $\mathrm{E}\,\xi_1 = 0$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n^{1/r}} = 0 \quad \text{m.b.}$$

Könnyen látható, hogy ebből $r = 1$ választással adódik a nagy számok Kolmogorov-féle erős törvénye. Az $r = 2$ esete, azaz $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ már más kategória, amivel a centrális határeloszlási tétel foglalkozik (lásd a 8.12. megjegyzésben).

8.2. Centrális határeloszlási tétel

A következő tétel rávilágít a normális eloszlás központi jelentőségére.

8.11. Tétel Centrális határeloszlási tétel

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független, azonos eloszlású, véges pozitív szórású valószínűségi változók. Ekkor az $S_n := \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$ standardizáltjának határeloszlása standard normális, vagyis minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} F_{\widetilde{S}_n}(x) = \Phi(x),$$

ahol

$$\widetilde{S}_n = \frac{S_n - \mathrm{E}\,S_n}{\mathrm{D}\,S_n} = \frac{S_n - n\,\mathrm{E}\,\xi_1}{\sqrt{n}\,\mathrm{D}\,\xi_1}.$$

Ha a ξ_i valószínűségi változók közös eloszlása p paraméterű karakterisztikus eloszlás, azaz S_n minden n-re n-edrendű p paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó, akkor a centrális határeloszlás tételből speciálisan az úgynevezett *Moivre – Laplace-tételt* kapjuk. Ezek szerint tehát

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < x\right) = \Phi(x),$$

vagyis nagy n esetén

$$\mathrm{P}(S_n < x) \approx \Phi\left(\frac{x - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

Így tehát a binomiális eloszlást közelíti a normális eloszlás. Például, ha $n = 1000$ lövést adunk le egy célra, és minden lövés egymástól függetlenül $p = 0{,}11$ valószínűséggel talál, akkor annak a valószínűsége, hogy 100-nál kevesebbszer találunk célba

$$\mathrm{P}(S_{1000} < 100) = \sum_{k=0}^{99} \binom{1000}{k} \cdot 0{,}11^k \cdot 0{,}89^{1000-k} \approx \Phi\left(\frac{100 - 110}{\sqrt{110 \cdot 0{,}89}}\right) \approx 0{,}1562,$$

ahol S_{1000} a találatok száma.

8.12. *Megjegyzés.* Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots$ független, azonos eloszlású, véges pozitív szórású valószínűségi változók. Ha $\mathrm{E}\,\xi_1 = 0$, akkor $S_n := \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ jelöléssel a centrális határeloszlási tétel alapján

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}\,\mathrm{D}\,\xi_1} < x\right) = \Phi(x)$$

minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Így

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(-\frac{\varepsilon}{\mathrm{D}\,\xi_1} \le \frac{S_n}{\sqrt{n}\,\mathrm{D}\,\xi_1} < \frac{\varepsilon}{\mathrm{D}\,\xi_1}\right) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\mathrm{D}\,\xi_1}\right) - \Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\mathrm{D}\,\xi_1}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\mathrm{D}\,\xi_1}\right) - 1$$

minden $\varepsilon > 0$ esetén. Ebből könnyen látható, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\left|\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right| \ge \varepsilon\right) \ge 2\Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\mathrm{D}\,\xi_1}\right) > 0$$

minden $\varepsilon > 0$ esetén. Így ekkor $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ nem konvergál sztochasztikusan 0-hoz. Például $\varepsilon = \mathrm{D}\,\xi_1$ esetén $2\Phi(-\frac{\varepsilon}{\mathrm{D}\,\xi_1}) \approx 0{,}3174$, azaz még nagyon nagy n-ek esetén is az $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ jelentős valószínűséggel jobban eltér 0-tól, mint $\mathrm{D}\,\xi_1$, bár nagyobb az esélye, hogy ez nem következik be. Hasonló okoskodással látható, hogy nagyon nagy n-ek esetén is az $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ nagy valószínűséggel a 0-tól nem távolodik el nagyon, de pozitív valószínűséggel $|\frac{S_n}{\sqrt{n}}|$ tetszőlegesen nagy lehet.

8.13. *Megjegyzés.* Dobjunk fel többször egymásután egy szabályos pénzérmét. Jelölje S_n a fej dobások gyakoriságát n dobás után. Ekkor léteznek olyan $\xi_1, \xi_2, \dots$ független valószínűségi változók, melyek mindegyike $p = \frac{1}{2}$ paraméterű karakterisztikus eloszlású és $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ teljesül minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Így a nagy számok Kolmogorov-féle erős törvénye alapján

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \frac{1}{2} \quad \text{m.b.},$$

melyből

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n - S_n}{S_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{S_n} - 1\right) = 2 - 1 = 1 \quad \text{m.b.}$$

Tehát azt kaptuk, hogy az írás és a fej dobásszámainak aránya 1-hez konvergál majdnem biztosan. Gyakran vonják le ebből azt a következtetést, hogy a fej és írás dobások számai „kiegyenlítődnek” a dobások számának növelésével, azaz

$$|S_n - (n - S_n)| = |2S_n - n|$$

majdnem biztosan 0-hoz konvergál. De ez nem igaz!

Legyen K egy tetszőleges pozitív szám. Mivel S_n egy n-edrendű $\frac{1}{2}$ paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó, így a Moivre – Laplace-tétel szerint, nagy n esetén

$$\mathrm{P}(|2S_n - n| \ge K) = \mathrm{P}(2S_n - n \ge K) + \mathrm{P}(2S_n - n \le -K) \ge$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \mathrm{P}(2S_n - n \geq K) + \mathrm{P}(2S_n - n < -K) = \\
&= 1 - \mathrm{P}(2S_n - n < K) + \mathrm{P}(2S_n - n < -K) = \\
&= 1 - \mathrm{P}\left(S_n < \frac{K}{2} + \frac{n}{2}\right) + \mathrm{P}\left(S_n < -\frac{K}{2} + \frac{n}{2}\right) \approx \\
&\approx 1 - \Phi\left(\frac{\frac{K}{2} + \frac{n}{2} - \frac{n}{2}}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}}\right) + \Phi\left(\frac{-\frac{K}{2} + \frac{n}{2} - \frac{n}{2}}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}}\right) = \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{K}{\sqrt{n}}\right) + \Phi\left(-\frac{K}{\sqrt{n}}\right) = 2 - 2\Phi\left(\frac{K}{\sqrt{n}}\right).
\end{aligned}
$$

Mivel

$$
\lim_{n\to\infty} 2 - 2\Phi\left(\frac{K}{\sqrt{n}}\right) = 2 - 2\Phi(0) = 2 - 2 \cdot 0{,}5 = 1,
$$

ezért bármilyen nagynak is választjuk a K értékét, n növelésével egyre nagyobb annak a valószínűsége (határértékben 1), hogy a fej dobások és az írás dobások számainak különbsége abszolút értékben K-nál nagyobb.

A centrális határeloszlási tétel szemléltetése

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független, azonos eloszlású, véges pozitív szórású valószínűségi változók. Ekkor $S_n := \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$ jelöléssel a centrális határeloszlási tétel alapján

$$
\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\frac{S_n - n\,\mathrm{E}\,\xi_1}{\sqrt{n}\,\mathrm{D}\,\xi_1} < x\right) = \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t,
$$

így kis $\Delta x > 0$ esetén

$$
\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(x \leq \frac{S_n - n\,\mathrm{E}\,\xi_1}{\sqrt{n}\,\mathrm{D}\,\xi_1} < x + \Delta x\right) = \int_{x}^{x+\Delta x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \approx \varphi(x)\Delta x.
$$

Ebből nagy n és kis $\Delta x > 0$ esetén

$$
\frac{1}{\Delta x}\,\mathrm{P}\left(x \leq \frac{S_n - n\,\mathrm{E}\,\xi_1}{\sqrt{n}\,\mathrm{D}\,\xi_1} < x + \Delta x\right) \approx \varphi(x)
$$

teljesül minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Ha ϱ_N annak az eseménynek a gyakorisága, hogy S_n standardizáltja az $[x, x + \Delta x)$ intervallumba esik N darab (n elemű) kísérletsorozat után, akkor a nagy számok Bernoulli-féle törvénye alapján, nagy N esetén

$$
\frac{\varrho_N}{N} \approx \mathrm{P}\left(x \leq \frac{S_n - n\,\mathrm{E}\,\xi_1}{\sqrt{n}\,\mathrm{D}\,\xi_1} < x + \Delta x\right).
$$

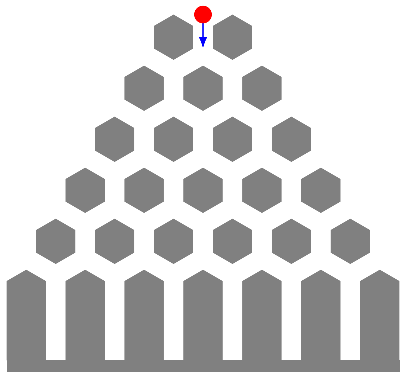
Így, ha n és N nagy, továbbá $\Delta x > 0$ kicsi, akkor

$$
\frac{\varrho_N}{N\Delta x} \approx \varphi(x)
$$

minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Ezt a tapasztalat is igazolja.

Galton-deszka, bolyongás

Az alábbi sematikus ábrán egy ún. *Galton-deszkát* láthatunk.



A piros golyót a nyíl irányában leejtve nekiütközik egy szürkével jelölt éknek. Ezután 0,5 valószínűséggel jobbra illetve 0,5 valószínűséggel balra esik. Ezután megint egy éknek ütközik stb., majd kiköt valamelyik folyosón. Sok golyót leejtve, azok milyen eloszlásban helyezkednek el a folyosókon?

Ezt a folyamatot a következőképpen is át lehet fogalmazni: Egy szabályos pénzérmét feldobunk. Ha a fej oldalára esik, akkor 1 forintot nyerünk (a golyó jobbra esik), ellenkező esetben pedig 1 forintot veszítünk (a golyó balra esik). Ezt a játékot többször megismételve az össznyeremény azt jelképezi, hogy a Galton-deszka melyik folyosóján landolt a golyó.

Ez utóbbi folyamat általánosítása, ha egy játékban p valószínűséggel nyerünk 1 forintot és $1-p$ valószínűséggel veszítünk 1 forintot. Ezt nevezzük p paraméterű *bolyongásnak*. Jelölje S_n az össznyeremény értékét n játék után és legyen ϱ_n a nyerések száma ezekben a játékokban. Ekkor $n-\varrho_n$ a veszített játékok száma, így

$$S_n = \varrho_n - (n-\varrho_n) = 2\varrho_n - n.$$

Másrészt ϱ_n egy n-edrendű p paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó (hiszen a nyerések gyakorisága), így

$$\mathrm{P}(S_n = k) = \mathrm{P}(2\varrho_n - n = k) = \mathrm{P}\left(\varrho_n = \frac{n+k}{2}\right) = \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}}(1-p)^{n-\frac{n+k}{2}},$$

ahol $\frac{n+k}{2} \in \{0, 1, \ldots, n\}$, azaz $k \in \{-n, -n+2, -n+4, \ldots, n\}$. Ekkor

$$\mathrm{E}\, S_n = \mathrm{E}(2\varrho_n - n) = 2\,\mathrm{E}\,\varrho_n - n = 2np - n = n(2p-1)$$

és

$$\mathrm{D}^2\, S_n = \mathrm{D}^2(2\varrho_n - n) = 4\,\mathrm{D}^2\,\varrho_n = 4np(1-p).$$

Ezért a centrális határeloszlási tétel alapján

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\frac{S_n - n(2p-1)}{2\sqrt{np(1-p)}} < x\right) = \Phi(x)$$

minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

Speciálisan $p = 0{,}5$ esetén (vagyis amit a Galton-deszka modellez)

$$\mathrm{P}(S_n = k) = \binom{n}{\frac{n+k}{2}} 2^{-n},$$

ahol $k \in \{-n, -n+2, -n+4, \dots, n\}$, $\mathrm{E}\, S_n = 0$, $\mathrm{D}\, S_n = \sqrt{n}$ és

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} < x\right) = \Phi(x).$$

Ebből x helyére $\frac{x}{\sqrt{n}}$ írva adódik, hogy nagy n esetén

$$\mathrm{P}(S_n < x) \approx \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right).$$

Ezek szerint tehát, ha k az S_n egy lehetséges értéke és n nagy, akkor

$$\mathrm{P}(S_n = k) = \mathrm{P}(k \le S_n < k+1) \approx \Phi\left(\frac{k+1}{\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \int_{\frac{k}{\sqrt{n}}}^{\frac{k+1}{\sqrt{n}}} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \approx \frac{1}{\sqrt{n}}\varphi\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right).$$

Ebből látható, hogy a Galton-deszkában sok golyót leejtve, azok a normális eloszlás sűrűségfüggvényére jellemző „harang” alakban fognak elhelyezkedni, azaz a szélek felé haladva egyre kevesebb golyó helyezkedik el az egyes folyosókon.

8.3. Iterált-logaritmus tétel

A nagy számok Marcinkiewicz – Zygmund-féle erős törvénye szerint, ha $\xi_1, \xi_2, \dots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, $\mathrm{E}\,|\xi_1|^r \in \mathbb{R}$ és $\mathrm{E}\,\xi_1 = 0$, akkor $0 < r < 2$ esetén az $S_n n^{-1/r}$ majdnem biztosan 0-hoz tart. Ugyanakkor $r = 2$ esetén a centrális határeloszlási tétel szerint $S_n n^{-1/2}$ bár nagy valószínűséggel a 0-tól nem távolodik el nagyon, de pozitív valószínűséggel $|S_n n^{-1/2}|$ tetszőlegesen nagy lehet. Ezen két tétel „között van” az iterált-logaritmus tétel, amely szerint az S_n-t alkalmas normáló tényezővel osztva, a sorozat realizációi „nem húzódnak össze 0-ra”, de nem is „kenődnek szét” a számegyenesen.

8.14. Tétel Iterált-logaritmus tétel

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots$ független, azonos eloszlású, véges pozitív szórású valószínűségi változók. Ha $\mathrm{E}\,\xi_1 = 0$, akkor $S_n := \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ jelöléssel

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\mathrm{D}\,\xi_1 \sqrt{2n\ln(\ln n)}} = 1$$

és

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{\mathrm{D}\,\xi_1\sqrt{2n\ln(\ln n)}} = -1$$

majdnem biztosan.

Ezen tétel alapján tehát az

$$\frac{S_n}{\mathrm{D}\,\xi_1\sqrt{2n\ln(\ln n)}}$$

sorozatnak végtelen sokszor kell az 1 közeléből a -1 közelébe jutnia és viszont. Azonban a valóságban ezek az átjutások nagyon lassan történnek.

Irodalomjegyzék

[1] Daróczy Zoltán: *Mérték és integrál*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1984.

[2] Denkinger Géza: *Valószínűségszámítási gyakorlatok*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1986.

[3] Fazekas István: *Valószínűségszámítás*, Debreceni Egyetem Kossuth Egyetemi Kiadója, Debrecen, 2000.

[4] P. R. Halmos: *Mértékelmélet*, Gondolat, Budapest, 1984.

[5] Mogyoródi József, Somogyi Árpád: *Valószínűségszámítás I.*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1982.

[6] A. N. Kolmogorov, Sz. V. Fomin: *A függvényelmélet és a funkcionálanalízis elemei*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981.

[7] Rényi Alfréd: *Valószínűségszámítás*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1966.

[8] Solt György: *Valószínűségszámítás*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1993.

[9] Szőkefalvi-Nagy Béla: *Valós függvények és függvénysorok*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1954.

[10] Tómács Tibor: *Mérték és integrál*, https://tomacstibor.uni-eszterhazy.hu/tananyagok/Mertekelmelet.pdf

[11] Tómács Tibor: *Valószínűségszámítási gyakorlatok*, https://tomacstibor.uni-eszterhazy.hu/tananyagok/Valoszinusegszamitasi_gyakorlatok.pdf

Standard normális eloszlás táblázata

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,5000	0,45	0,6736	0,90	0,8159	1,35	0,9115	1,80	0,9641	2,50	0,9938
0,01	0,5040	0,46	0,6772	0,91	0,8186	1,36	0,9131	1,81	0,9649	2,52	0,9941
0,02	0,5080	0,47	0,6808	0,92	0,8212	1,37	0,9147	1,82	0,9656	2,54	0,9945
0,03	0,5120	0,48	0,6844	0,93	0,8238	1,38	0,9162	1,83	0,9664	2,56	0,9948
0,04	0,5160	0,49	0,6879	0,94	0,8264	1,39	0,9177	1,84	0,9671	2,58	0,9951
0,05	0,5199	0,50	0,6915	0,95	0,8289	1,40	0,9192	1,85	0,9678	2,60	0,9953
0,06	0,5239	0,51	0,6950	0,96	0,8315	1,41	0,9207	1,86	0,9686	2,62	0,9956
0,07	0,5279	0,52	0,6985	0,97	0,8340	1,42	0,9222	1,87	0,9693	2,64	0,9959
0,08	0,5319	0,53	0,7019	0,98	0,8365	1,43	0,9236	1,88	0,9699	2,66	0,9961
0,09	0,5359	0,54	0,7054	0,99	0,8389	1,44	0,9251	1,89	0,9706	2,68	0,9963
0,10	0,5398	0,55	0,7088	1,00	0,8413	1,45	0,9265	1,90	0,9713	2,70	0,9965
0,11	0,5438	0,56	0,7123	1,01	0,8438	1,46	0,9279	1,91	0,9719	2,72	0,9967
0,12	0,5478	0,57	0,7157	1,02	0,8461	1,47	0,9292	1,92	0,9726	2,74	0,9969
0,13	0,5517	0,58	0,7190	1,03	0,8485	1,48	0,9306	1,93	0,9732	2,76	0,9971
0,14	0,5557	0,59	0,7224	1,04	0,8508	1,49	0,9319	1,94	0,9738	2,78	0,9973
0,15	0,5596	0,60	0,7257	1,05	0,8531	1,50	0,9332	1,95	0,9744	2,80	0,9974
0,16	0,5636	0,61	0,7291	1,06	0,8554	1,51	0,9345	1,96	0,9750	2,82	0,9976
0,17	0,5675	0,62	0,7324	1,07	0,8577	1,52	0,9357	1,97	0,9756	2,84	0,9977
0,18	0,5714	0,63	0,7357	1,08	0,8599	1,53	0,9370	1,98	0,9761	2,86	0,9979
0,19	0,5753	0,64	0,7389	1,09	0,8621	1,54	0,9382	1,99	0,9767	2,88	0,9980
0,20	0,5793	0,65	0,7422	1,10	0,8643	1,55	0,9394	2,00	0,9772	2,90	0,9981
0,21	0,5832	0,66	0,7454	1,11	0,8665	1,56	0,9406	2,02	0,9783	2,92	0,9982
0,22	0,5871	0,67	0,7486	1,12	0,8686	1,57	0,9418	2,04	0,9793	2,94	0,9984
0,23	0,5910	0,68	0,7517	1,13	0,8708	1,58	0,9429	2,06	0,9803	2,96	0,9985
0,24	0,5948	0,69	0,7549	1,14	0,8729	1,59	0,9441	2,08	0,9812	2,98	0,9986
0,25	0,5987	0,70	0,7580	1,15	0,8749	1,60	0,9452	2,10	0,9821	3,00	0,9987
0,26	0,6026	0,71	0,7611	1,16	0,8770	1,61	0,9463	2,12	0,9830	3,10	0,9990
0,27	0,6064	0,72	0,7642	1,17	0,8790	1,62	0,9474	2,14	0,9838	3,20	0,9993
0,28	0,6103	0,73	0,7673	1,18	0,8810	1,63	0,9484	2,16	0,9846	3,30	0,9995
0,29	0,6141	0,74	0,7704	1,19	0,8830	1,64	0,9495	2,18	0,9854	3,40	0,9997
0,30	0,6179	0,75	0,7734	1,20	0,8849	1,65	0,9505	2,20	0,9861	3,50	0,9998
0,31	0,6217	0,76	0,7764	1,21	0,8869	1,66	0,9515	2,22	0,9868		
0,32	0,6255	0,77	0,7794	1,22	0,8888	1,67	0,9525	2,24	0,9875		
0,33	0,6293	0,78	0,7823	1,23	0,8907	1,68	0,9535	2,26	0,9881		
0,34	0,6331	0,79	0,7852	1,24	0,8925	1,69	0,9545	2,28	0,9887		
0,35	0,6368	0,80	0,7881	1,25	0,8944	1,70	0,9554	2,30	0,9893		
0,36	0,6406	0,81	0,7910	1,26	0,8962	1,71	0,9564	2,32	0,9898		
0,37	0,6443	0,82	0,7939	1,27	0,8980	1,72	0,9573	2,34	0,9904		
0,38	0,6480	0,83	0,7967	1,28	0,8997	1,73	0,9582	2,36	0,9909		
0,39	0,6517	0,84	0,7995	1,29	0,9015	1,74	0,9591	2,38	0,9913		
0,40	0,6554	0,85	0,8023	1,30	0,9032	1,75	0,9599	2,40	0,9918		
0,41	0,6591	0,86	0,8051	1,31	0,9049	1,76	0,9608	2,42	0,9922		
0,42	0,6628	0,87	0,8078	1,32	0,9066	1,77	0,9616	2,44	0,9927		
0,43	0,6664	0,88	0,8106	1,33	0,9082	1,78	0,9625	2,46	0,9931		
0,44	0,6700	0,89	0,8133	1,34	0,9099	1,79	0,9633	2,48	0,9934		