ESZTERHÁZY KÁROLY KATOLIKUS EGYETEM
Matematikai és Informatikai Intézet

Tómács Tibor

Valószínűségszámítás és matematikai statisztika tanító szakosoknak (matematika VMT)

A jegyzet az alábbi címről szabadon letölthető:
https://tomacstibor.uni-eszterhazy.hu/tananyagok/Valoszinusegszamitas_tanito_szakosoknak.pdf

Eger, 2021. augusztus 12.

Tartalomjegyzék

Néhány fontos matematikai fogalom

Mielőtt rátérnénk a valószínűségszámítás tárgyalására, fontos tisztázni néhány olyan matematikai fogalmat és jelölést, melyek nélkül nem boldogulnánk a továbbiakban. Ezekről a fogalmakról a matematikai analízis órákon fognak bővebben tanulni.

Jelölés

$\emptyset$ üres halmaz
$\mathbb{Z}$ az egész számok halmaza
$\mathbb{N}$ a pozitív egész számok halmaza
$\mathbb{R}$ a valós számok halmaza
$\mathbb{Q}$ a racionális számok halmaza

Emlékeztetőül, egy szám akkor racionális, ha felírható két egész szám hányadosaként. Például 0,75 racionális, hiszen $0{,}75 = \frac{3}{4}$, de $\sqrt{2}$ (vagyis az a pozitív valós szám, melynek a négyzete 2) nem racionális, azaz *irracionális*.

Definíció

Halmazrendszernek nevezzük azokat a halmazokat, melyeknek az elemei is halmazok. Egy halmaz *hatványhalmazán* az adott halmaz összes részhalmazából álló halmazrendszert értjük.

Például halmazrendszerek a következők:

$$\{\emptyset, \mathbb{Z}\} \quad \text{és} \quad \big\{\{1,2\},\{3\}\big\}.$$

Az $\{1,2\}$ hatványhalmaza

$$\big\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\big\}.$$

Az $\emptyset$ minden hatványhalmaznak eleme, hiszen minden halmaznak részhalmaza.

Definíció

Egy halmazról azt mondjuk, hogy *megszámlálhatóan végtelen számosságú*, ha van olyan függvény, amely ezt a halmazt a pozitív egész számok halmazára kölcsönösen egyértelműen képezi le. Egy halmaz *megszámlálható számosságú*, ha véges sok eleme van vagy megszámlálhatóan végtelen számosságú.

Például a pozitív páros számok halmaza megszámlálhatóan végtelen számosságú, mert az $f\colon A \to \mathbb{N},\ f(n) := \frac{n}{2}$ függvény – ahol az A jelöli a pozitív páros számok halmazát – kölcsönösen egyértelmű leképezése A-nak $\mathbb{N}$-re. Bizonyítható, hogy például a racionális számok halmaza megszámlálhatóan végtelen számosságú, de a valós számok halmaza nem. Az utóbbit *kontinuum számosságúnak* nevezzük.

Definíció

Jelöljön A_i egy halmazt minden $i \in \mathbb{N}$ esetén. Ekkor

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

azon x elemekből álló halmazt jelöli, melyekre valamely $i \in \mathbb{N}$ esetén $x \in A_i$. Másrészt

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

azon x elemekből álló halmazt jelöli, melyekre $x \in A_i$ minden $i \in \mathbb{N}$ esetén.

Például, ha az A_i halmaz 1-től i-ig tartalmazza az egész számokat, akkor

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \mathbb{N} \quad \text{és} \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{1\}.$$

Definíció

Legyen a_n egy *valós számsorozat*, azaz $a_n \in \mathbb{R}$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

(1) Azt mondjuk, hogy a_n *nullsorozat*, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén $|a_n| < \varepsilon$ legfeljebb véges sok pozitív egész n kivételével teljesül.

(2) Azt mondjuk, hogy a_n *konvergens*, ha van olyan $a \in \mathbb{R}$, hogy $a_n - a$ nullsorozat. Ekkor az a számot az a_n sorozat *határértékének* nevezzük. Jelölése:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

A definícióból látható, hogy minden nullsorozat konvergens és a határértéke 0, továbbá, hogy az a_n pontosan akkor nullsorozat, ha $|a_n|$ nullsorozat.

Például az $a_n = \frac{1}{n}$ sorozat nullsorozat, mert bármely $\varepsilon > 0$ esetén, ha $n > \frac{1}{\varepsilon}$, akkor $|a_n| = \frac{1}{n} < \varepsilon$. (Azaz csak véges sok, nevezetesen $\frac{1}{\varepsilon}$ darab olyan a_n van, melyre $|a_n| < \varepsilon$ nem teljesül.) Tehát

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Ebből már következik, hogy például $a_n = \frac{1}{n} + 5$ konvergens sorozat és a határértéke 5, azaz

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + 5\right) = 5.$$

Definíció

Legyen a_n egy valós számsorozat és

$$s_n := \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Ha az s_n sorozat konvergens, akkor annak határértékét

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

módon jelöljük és az a_n sorozatból képzett *sorösszegnek* nevezzük.

Például $a_n = 0{,}5^n$ esetén a mértani sorozat összegképletét felhasználva adódik, hogy

$$s_n = 0{,}5 + 0{,}5^2 + \cdots + 0{,}5^n = 1 - 0{,}5^n.$$

Emlékeztetőül az összegképlet

$$q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1} - q}{q - 1}, \text{ ha } q \neq 1.$$

Mivel bármely $\varepsilon > 0$ esetén, ha $n > \log_{0,5} \varepsilon$, akkor $|-0{,}5^n| < \varepsilon$, ezért $-0{,}5^n$ nullsorozat, azaz s_n konvergens és a határértéke 1. Így

$$\sum_{i=1}^{\infty} 0{,}5^i = 1.$$

1. fejezet

Események és valószínűség

Bizonyos jelenségeknél az összes körülmény figyelembe vétele nagyon nehéz vagy lehetetlen. Ennek oka lehet például, hogy a jelenség hátterében meghúzódó körülmények rendszere a tudomány mai állása szerint még nem teljesen feltárt, vagy nem tudjuk mérni őket, vagy számuk túl nagy és kapcsolatuk nagyon bonyolult. Ilyenkor a figyelembe vett körülmények összessége nem határozza meg egy esemény bekövetkezésének elegendő okát. Az ilyen eseményeket *véletlen eseményeknek* nevezzük. Például dobókockával játszva csak azt a tényt vesszük figyelembe, hogy feldobtuk. Ez viszont nem határozza meg a dobás eredményét egyértelműen, így például a hatos dobása véletlen eseményt jelent számunkra.

Ha egy véletlen kimenetelű jelenség sokszor megismétlődhet, akkor *véletlen tömegjelenségről* beszélünk. Az ilyen típusú jelenségekről a véletlenszerűségük ellenére is áttekintést nyerhetünk. Például a radioaktív bomlás esetén minden egyes atommag bomlása véletlennek tekinthető, mégis sok milliárd atommag esetében már előre meg tudjuk mondani nagy pontossággal, hogy egy meghatározott időn belül hány százalékuk fog elbomlani. Ez a bomlás úgynevezett exponenciális törvénye, melyet a valószínűségszámítás segítségével írhatunk le.

A valószínűségszámítás a véletlen kimenetelű jelenségek illetve kísérletek matematikai modellezése.

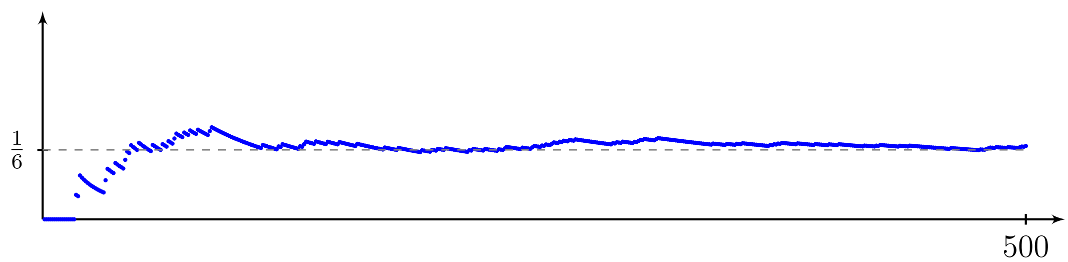
Egy kísérletben azt tekintjük *megfigyelhető eseménynek* (a továbbiakban röviden csak eseményt mondunk), melyről egyértelműen eldönthető a kísérlet elvégzése után, hogy bekövetkezett-e vagy sem.

A matematikában az eseményeket halmazokkal fogjuk modellezni. Ha egy kísérletben A és B halmazok eseményeket modelleznek, akkor $A \cup B$ azt fogja jelenteni, hogy az A és B közül legalább az egyik bekövetkezik. Erről egyértelműen eldönthető a kísérlet elvégzése után, hogy bekövetkezett-e, ezért ez is eseményt modellez. Másrészt, ha A esemény, akkor az A ellenkezője is az. Jelöljük ezt $\overline{A}$-val. Az $A \cup \overline{A}$ biztosan bekövetkezik, ezért ezt *biztos eseménynek* nevezzük és Ω-val jelöljük. Ebből látható, hogy $\overline{A}$ az A-nak Ω-ra vonatkozó komplementere, továbbá minden esemény az Ω egy részhalmaza. A nem megfigyelhető események – vagyis amelyekről a kísérlet elvégzése után nem állapítható meg egyértelműen, hogy bekövetkezett-e – szintén részhalmazai az Ω-nak, de ezekkel a továbbiakban nem foglalkozunk. Az adott kísérletre vonatkozó események rendszerét jelöljük $\mathcal{F}$-fel, mely tehát az Ω hatványhalmazának egy részhalmaza.

Például amikor egy dobókockával játszunk, az egyes, kettes, hármas, négyes, ötös vagy a hatos oldal lehet felül. A nekik megfelelő halmazok legyenek a következők: $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$. De más események is vannak. Például hogy páros szám lesz felül: $\{2, 4, 6\} = \{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}$, vagy nem egyes lesz felül: $\overline{\{1\}} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Itt a biztos esemény $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Az Ω felírásánál azt is figyelembe kell venni, hogy egy kísérletet mikor tekintünk sikeresnek, illetve mikor sikertelen, azaz mikor kell helyette új kísérletet végrehajtani. Az előbbi példában, ha az élére esik a kocka, akkor azt sikertelen kísérletnek tekintjük, hiszen Ω elemei között egy sincs, ami ezt az esetet jelentené. Amennyiben mégis be akarjuk vonni a modellünkbe a kocka élére esését, akkor az Ω felírása módosul például erre: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \text{él}\}$.

A modellalkotás következő lépése valamilyen tapasztalati törvény megfigyelése az eseményekkel kapcsolatosan. Ilyet először *Jacob Bernoulli* (1654–1705) svájci matematikus publikált. Egy kísérletet hajtsunk végre egymás után többször egymástól függetlenül azonos körülmények között. Figyeljünk meg ebben a kísérletsorozatban egy bizonyos eseményt. Ezen esemény bekövetkezéseinek a számát az esemény *gyakoriságának*, míg a bekövetkezések számának és a kísérletek számának arányát az esemény *relatív gyakoriságának* fogjuk nevezni. Például egy dobókockával többször dobva, ábrázoljuk a hatos dobások relatív gyakoriságát a dobások számának függvényében:



Azt látjuk, hogy a hatos dobás relatív gyakorisága a dobások számának növelésével egyre kisebb mértékben ingadozik $\frac{1}{6}$ körül. Más véletlen kimenetelű kísérletek eseményeire is hasonló a tapasztalat:

A kísérletek számának növelésével a figyelt esemény bekövetkezésének relatív gyakorisága egyre kisebb mértékben ingadozik egy konstans körül.

Ezt a konstanst a figyelt esemény *valószínűségének* fogjuk nevezni. A továbbiakban $\mathrm{P}(A)$ jelölje az A esemény valószínűségét. Itt P egy függvény, amely minden eseményhez hozzárendel egy számot. Könnyen látható, hogy minden esemény valószínűsége nemnegatív valós szám, a biztos esemény valószínűsége 1, illetve egyszerre be nem következő események uniójának valószínűsége az események valószínűségeinek összege.

Andrej Nyikolajevics Kolmogorov (1903–1987) az előzőeket kiegészítve még azt is feltételezte, hogy megszámlálhatóan végtelen sok esemény uniója is esemény, továbbá, hogy megszámlálhatóan végtelen sok páronként diszjunkt esemény uniójának valószínűsége, ezen események valószínűségeinek összegével egyenlő. Ezzel egy olyan elméletet kapott, amellyel már matematikailag bizonyíthatóvá válik Bernoulli megfigyelése. Ezt foglaltuk össze a következő definícióban, amely tehát a véletlen kimenetelű jelenségek matematikai modellje.

Definíció

Legyen Ω egy nem üres halmaz, az $\mathcal{F}$ részhalmaza az Ω hatványhalmazának, továbbá $\mathrm{P}\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy ezekre teljesülnek a következők:
1. axióma. $\Omega \in \mathcal{F}$.
2. axióma. Ha $A \in \mathcal{F}$, akkor $\overline{A} \in \mathcal{F}$, ahol $\overline{A} = \Omega \setminus A$.
3. axióma. Ha $A_i \in \mathcal{F}$ minden $i \in \mathbb{N}$ esetén, akkor

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$

4. axióma. Minden $A \in \mathcal{F}$ esetén $\mathrm{P}(A) \geq 0$.
5. axióma. $\mathrm{P}(\Omega) = 1$.
6. axióma. Ha $A_i \in \mathcal{F}$ $(i = 1, 2, \dots)$ páronként diszjunktak, akkor

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_i).$$

Ekkor $\mathcal{F}$-et *σ-algebrának* (ejtsd: szigma-algebra), elemeit *eseményeknek*, Ω-t *biztos eseménynek*, a P függvényt *valószínűségnek*, a $\mathrm{P}(A)$ számot az A *esemény valószínűségének*, az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ rendezett hármast *valószínűségi mezőnek*, a 6. axiómát pedig *σ-additivitásnak* nevezzük.

Definíció

Az 1. és 2. axiómák miatt $\emptyset \in \mathcal{F}$, amit a továbbiakban *lehetetlen eseménynek* nevezünk.

Tétel

Ha $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező, $A_i \in \mathcal{F}$ minden $i \in \mathbb{N}$ esetén és $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}, \qquad \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F} \quad \text{és} \quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}.$$

Definíció

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező és $A, B \in \mathcal{F}$.

(1) Ha $A \subset B$, akkor azt mondjuk, hogy az A *maga után vonja* B-t.

(2) $\overline{A}$-t az A *ellentett eseményének* nevezzük.

(3) Ha $A \cap B = \emptyset$, akkor az A és B eseményeket *egymást kizáró eseményeknek* nevezzük.

$A \cup B$ akkor következik be, ha A és B közül legalább az egyik bekövetkezik. $A \cap B$ akkor következik be, ha A és B egyszerre bekövetkezik. $\overline{A}$ akkor következik be, ha az A nem következik be. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ akkor következik be, ha A bekövetkezik de B nem.

Tétel

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező, $A_i, A, B \in \mathcal{F}$ $(i \in \mathbb{N})$ és $n \in \mathbb{N}$. Ekkor teljesülnek a következők:

(1) $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$.

(2) (*véges additivitás*) Ha $A_1, \dots, A_n$ páronként egymást kizáró események, akkor $\mathrm{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \mathrm{P}(A_1) + \dots + \mathrm{P}(A_n)$.

(3) $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A})$.

(4) $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$.

(5) (*monotonitás*) Ha $A \subset B$, akkor $\mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(B)$.

(6) $\mathrm{P}(A) \leq 1$.

Feladatok

1.1. feladat. Egy dobókockát kétszer feldobunk. Ha a dobott számok összege kettő, akkor feldobjuk még egyszer. Adjuk meg az Ω-t!

Megoldás.

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(1,1,1),(1,1,2),(1,1,3),(1,1,4),(1,1,5),(1,1,6),\\ &(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\ &(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ &(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\ &(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\ &(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\ &(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}\end{aligned}$$

1.2. feladat. Az egész számok közül választunk egyet. Az A esemény jelentse azt, hogy a kiválasztott szám öttel osztható, B pedig azt, hogy a szám nullára végződik. Mit jelentenek a következő események?

(1) $A \cup B$
(2) $A \cap B$

(3) $A \setminus B$

Megoldás.
(1) $A \cup B$: a kiválasztott szám öttel osztható;
(2) $A \cap B$: a kiválasztott szám nullára végződik;
(3) $A \setminus B$: a kiválasztott szám ötre végződik;

1.3. feladat. Jelentse A azt az eseményt, hogy magyar kártyából egy zöld lapot húzunk, B pedig azt, hogy királyt. Fogalmazzuk meg szavakban a következő eseményeket! Az egyes események hányféleképpen következhetnek be?
(1) $A \cup B$
(2) $A \cap B$
(3) $\overline{A} \cap B$
(4) $\overline{A} \cup \overline{B}$
(5) $A \cup \overline{B}$
(6) $A \setminus B$
(7) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
(8) $\overline{A \cup B}$
(9) $\overline{A \cap B}$.

Megoldás.
(1) $A \cup B$: Zöldet vagy királyt húzunk. (11)
(2) $A \cap B$: Zöld királyt húzunk. (1)
(3) $\overline{A} \cap B$: Zöldtől különböző királyt húzunk. (3)
(4) $\overline{A} \cup \overline{B}$: Zöld királytól különbözőt húzunk. (31)
(5) $A \cup \overline{B}$: Zöldet vagy királytól különbözőt húzunk. (29)
(6) $A \setminus B$: Zöldet húzunk, de nem királyt. (7)
(7) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$: Zöldet vagy királyt, de nem zöld királyt húzunk. (10)
(8) $\overline{A \cup B}$: Nem zöldet és nem is királyt húzunk. (21)
(9) $\overline{A \cap B}$: Zöld királytól különbözőt húzunk. (31)

1.4. feladat. Egy műhelyben három gép dolgozik. Jelentse A_i azt az eseményt, hogy az i-edik gép egy éven belül elromlik. Fejezzük ki az A_i eseményekkel a következőket:
(1) csak az első romlik el;
(2) mindhárom elromlik;
(3) egyik sem romlik el;
(4) az első és a második nem romlik el;
(5) az első és a második elromlik, a harmadik nem;
(6) csak egy gép romlik el;
(7) legfeljebb egy gép romlik el;
(8) legfeljebb két gép romlik el;
(9) legalább egy gép elromlik.

Megoldás.
(1) $A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$
(2) $A_1 \cap A_2 \cap A_3$
(3) $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$

(4) $\overline{A_1} \cap \overline{A_2}$
(5) $A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}$
(6) $(A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3}) \cup (\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3)$
(7) $(A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3}) \cup (\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3) \cup (\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3})$
(8) $\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3}$
(9) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$

1.5. feladat. Két számot húzunk egymás után az első ezer pozitív egész szám közül. Legyen A az az esemény, hogy az első páros, B pedig az, hogy a második szám páros. Jelöljük C-vel azt az eseményt, hogy a két szám szorzata páros, D-vel pedig azt, hogy páratlan. Írjuk fel C-t és D-t az A és B eseményekkel!

Megoldás. $C = A \cup B$ és $D = \overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$.

2. fejezet

Klasszikus valószínűségi mező

Most a legegyszerűbb valószínűségi mezőt mutatjuk be, melyben a biztos esemény egy véges halmaz és minden esemény valószínűsége arányos a számosságával. A gyakorlatban a szerencsejátékok kapcsán merült fel először ennek a vizsgálata.

Definíció

Legyen Ω egy n elemű halmaz, $\mathcal{F}$ az Ω hatványhalmaza, továbbá

$$\mathrm{P}\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}, \quad \mathrm{P}(A) = \frac{k}{n},$$

ahol k az A elemeinek a száma. Ekkor az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$-t *klasszikus valószínűségi mezőnek* nevezzük.

Tétel

Legyen Ω nem üres véges halmaz, $\mathcal{F}$ az Ω hatványhalmaza és $\mathrm{P}\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ valószínűség. Ekkor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ pontosan abban az esetben klasszikus valószínűségi mező, ha az egyelemű események valószínűségei megegyeznek.

A példák megoldásánál először a biztos eseményt határozzuk meg, hiszen csak az alapján lehet tudni, hogy mennyi az elemeinek a száma (n), amit úgy is szoktak nevezni, hogy az összes esetek száma. Ha ezt tudjuk, akkor már a figyelt A esemény elemeinek a száma (k) is meghatározható, amit kedvező esetek számának is neveznek. Fontos, hogy a biztos esemény minden egyelemű részhalmazának ugyanakkora legyen a valószínűsége, különben nem klasszikus a valószínűségi mező, így a valószínűség sem lesz egyenlő $\frac{k}{n}$-nel.

Az összes illetve kedvező esetek számát legtöbbször ún. kombinatorikai eszközökkel számolhatjuk ki. Először bevezetünk néhány jelölést, amire szükségünk lesz:

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$$

(ejtsd: „n *faktoriális*”), ahol $n \in \mathbb{N}$. Kényelmi okokból még bevezetjük a

$$0! := 1$$

jelölést is. Szükségünk lesz még a *binomiális együttható* fogalmára is:

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

(ejtsd: „n alatt a k”), ahol $n, k \in \mathbb{N}$ és $k \leq n$. A kombinatorikai alapeseteket példákon mutatjuk be.

Ismétlés nélküli permutációk száma ♦ Hányféle ötjegyű számot lehet előállítani az 1, 3, 5, 7, 9 számjegyekből, ha ezekből mindegyiket fel kell használni?

Megoldás. Az első számjegyet ötféleképpen, a következőt négy, aztán három, majd kettő, végül az utolsót már csak egyféleképpen lehet kiválasztani. Így a megoldás $5! = 120$.

Általánosan: n db elemet $n!$-féleképpen lehet sorba állítani úgy, hogy minden elemet pontosan egyszer használunk fel.

Ismétléses permutációk száma ♦ Hányféle hétjegyű számot lehet előállítani az 1, 1, 3, 3, 3, 5, 5 számjegyekből, ha ezekből mindegyiket fel kell használni?

Megoldás. Ezt a hét db számjegyet $7!$-féleképpen állíthatjuk sorba, de ezekben egy eset $2! \cdot 3! \cdot 2!$-szor ismétlődik. Így a megoldás $\frac{7!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = 210$.

Általánosan: Ha n db elemből $k_1, k_2, \ldots, k_r$ db azonos van $(k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n)$, akkor ezek mindegyikének felhasználásával

$$\frac{n!}{k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_r}$$

különböző sorba állítást kaphatunk.

Ismétlés nélküli kombinációk száma ♦ Ötöslottón hányféle számötöst sorsolhatnak ki?

Megoldás. Az első számot 90-féleképpen húzhatják, a következőt 89, majd 88 stb. az ötödiket 86-féleképpen húzhatják ki. Azonban így azokat az eseteket is beleszámoltuk, amikor ugyanazt a számötöst húzták, csak más sorrendben. Egy konkrét számötöst $5!$-féleképpen húzhatnak ki, így a megoldás $\frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{5!} = \binom{90}{5} = 43\,949\,268$.

Általánosan: Ha n db különböző elemből k darabot $(0 \leq k \leq n)$ kell kiválasztani úgy, hogy egy elemet maximum csak egyszer választhatjuk és a sorrend nem számít, akkor ezt

$$\binom{n}{k}$$

módon tehetjük meg.

Ismétléses kombinációk száma ♦ 10 db postaládába akarunk elhelyezni 15 db egyforma szórólapot. Hányféleképpen tehetjük ezt meg?

Megoldás. A gondolatmenet hosszú, itt csak a végeredményt közöljük: $\binom{10+15-1}{15} = \binom{24}{15} = 1\,307\,504$.

Általánosan: Ha n db különböző elemből k darabot kell kiválasztani úgy, hogy egy elemet többször is választhatjuk és a sorrend nem számít, akkor ezt

$$\binom{n+k-1}{k}$$

módon tehetjük meg.

Ismétlés nélküli variációk száma ♦ Egy 8 fős brigádból 5 embert kell kiválasztani 5 különböző munkára. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha bármely munkára bárki kiválasztható?

Megoldás. Az első munkára 8 ember közül választhatunk, a másodikra 7 stb. az ötödikre 4 ember közül választhatunk. Így a megoldás $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = \binom{8}{5} \cdot 5! = 6720$.

Általánosan: Ha n db különböző elemből k darabot $(0 \le k \le n)$ kell kiválasztani úgy, hogy egy elemet maximum csak egyszer választhatjuk és a sorrend is számít, akkor ezt

$$\binom{n}{k}k!$$

módon tehetjük meg.

Ismétléses variációk száma ♦ Totóban egy tipposzlopot hányféleképpen tölthetünk ki?

Megoldás. 14 db meccsre kell tippelni, egyre 3-féleképpen (1, 2, x). Így a megoldás $3^{14} = 4\,782\,969$.

Általánosan: Ha n db különböző elemből k darabot kell kiválasztani úgy, hogy egy elemet többször is választhatjuk és a sorrend számít, akkor ezt n^k módon tehetjük meg.

Feladatok

2.1. feladat. Totóban mi a valószínűsége a 10-es találatnak, ha feltesszük, hogy minden tipp bekövetkezésének a valószínűsége egyforma?

Megoldás. Az Ω legyen az 1, 2, x elemek összes 14-edosztályú ismétléses variációjának halmaza. Ekkor minden tippnek megfelel pontosan egy Ω-beli elem. Ekkor egy klasszikus valószínűségi mezőt kapunk, melyben a 10-es találat $\binom{13}{10} \cdot 2^3 \cdot 3$-féleképpen következhet be. Ugyanis a 10-es találatot az első 13 mérkőzésből kell elérni, ami

$\binom{13}{10} \cdot 2^3$-féleképpen lehetséges, és még a 14. mérkőzésre 3-féleképpen tippelhetünk. Az Ω elemeinek a száma, azaz az összes esetek száma 3^{14}. Így a valószínűség

$$\frac{\binom{13}{10} \cdot 2^3 \cdot 3}{3^{14}}.$$

2.2. feladat. 52 lapos römi kártyát szétosztunk Antalnak, Bélának, Józsefnek és Imrének véletlenszerűen úgy, hogy mindenkinek 13 lapja legyen. Mi a valószínűsége annak, hogy a treff ászt Antal kapja meg?

Megoldás. Az $\{\omega_1\}$ reprezentálja azt az esetet, amikor a treff ászt Antal kapja meg, hasonlóan $\{\omega_2\}$ azt amikor Béla, $\{\omega_3\}$ azt amikor József, végül $\{\omega_4\}$ azt amikor Imre kapja meg. Legyen $\Omega := \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$. Egyik személyt sem tünteti ki a többihez képest a leosztás, így az $\{\omega_i\}$-k valószínűségei megegyeznek. Tehát ez klasszikus valószínűségi mező. Ekkor a kedvező esetek száma 1, míg az összes esetek száma 4. Vagyis a valószínűség $\frac{1}{4}$.

Másképpen is megoldhatjuk a feladatot. Az Ω legyen a kártya 52 lapjának összes 13-adosztályú ismétlés nélküli kombinációjának halmaza. Ekkor az Antalnak kiosztott lapok bármely kombinációjának megfelel pontosan egy Ω-beli elem. Mivel ezek valószínűségei egyformák a szimmetria viszonyok miatt, ezért klasszikus valószínűségi mezőt kapunk. Azon esetek száma amikor a treff ász a kombinációban van, azaz a kedvező esetek száma, $\binom{51}{12}$. Az Ω elemeinek a száma $\binom{52}{13}$. Így a valószínűség $\binom{51}{12} : \binom{52}{13} = \frac{1}{4}$.

2.3. feladat. Két szabályos kockát feldobunk. Mi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7?

Megoldás. Először azt tisztázzuk, hogy a két kockát meg kell-e különböztetni vagy sem? A válasz meglepő módon az, hogy mindegy. Ugyanis az szubjektív tény, hogy meg tudjuk-e különböztetni a kockákat vagy sem, míg a valószínűség értéke objektív.

Most tekintsük azt az esetet, amikor a két kockát megkülönböztetjük. Ekkor

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(1,1), (1,2), \dots, (1,6),\\ &(2,1), (2,2), \dots, (2,6),\\ &\vdots\\ &(6,1), (6,2), \dots, (6,6)\}.\end{aligned}$$

A kérdéses esemény $A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$, tehát $\mathrm{P}(A) = \frac{6}{36}$.

Ezután vizsgáljuk azt az esetet, amikor a két kockát nem különböztetjük meg! Ebben az esetben

$$\begin{aligned}\Omega = \{(1,1), (1,2), \dots, &(1,6),\\ (2,2), \dots, &(2,6),\\ &\vdots\\ &(6,6)\}.\end{aligned}$$

A kérdéses esemény $A = \{(1,6),(2,5),(3,4)\}$, tehát $\mathrm{P}(A) = \frac{3}{21}$. Ez viszont nem egyezik meg az előbbi eredménnyel, miközben azt mondtuk, hogy mindegy melyik esetet taglaljuk, az eredménynek ugyanannak kell lennie. Mi a látszólagos ellentmondás oka? A második esetbeli rossz számítás. Ugyanis az nem alkot klasszikus valószínűségi mezőt, hiszen például $\mathrm{P}\Big(\{(1,1)\}\Big) \neq \mathrm{P}\Big(\{(1,2)\}\Big)$. Tehát ebben az esetben a $\frac{3}{21}$ hányados nem egyenlő a $\mathrm{P}(A)$ értékével. Ekkor a következő számítás a helyes: Az első esetre visszavezetve (ami klasszikus valószínűségi mező) könnyen látható, hogy $\mathrm{P}\Big(\{(1,6)\}\Big) = \mathrm{P}\Big(\{(2,5)\}\Big) = \mathrm{P}\Big(\{(3,4)\}\Big) = \frac{2}{36}$, így $\mathrm{P}(A) = 3 \cdot \frac{2}{36}$, ami már megegyezik az előző eredménnyel.

Összefoglalva tehát, mindegy, hogy a kockákat megkülönböztetjük vagy sem, de előbbi esetben klasszikus valószínűségi mezőt kapunk, míg az utóbbiban nem. Ezért célszerűbb a kockák megkülönböztetése.

2.4. feladat. Ötöslottóban egy szelvénnyel játszva, mi a valószínűsége, hogy kettes találatunk lesz?

Megoldás. Legyen Ω az összes lottóötös halmaza, azaz lexikografikus elrendezésben

$$\Omega := \Big\{\{1,2,3,4,5\},\{1,2,3,4,6\},\ldots,\{86,87,88,89,90\}\Big\}.$$

Ekkor Ω elemeinek a száma $\binom{90}{5}$. Fontos kérdés, hogy ez klasszikus valószínűségi mező-e, azaz például az $\{1,2,3,4,5\}$ és az $\{13,25,41,72,86\}$ lottóötösök valószínűségei megegyeznek-e? Gyakran hallott válasz, hogy nem, mivel az első lottóötös „rendezett”, míg a második nem, továbbá a tapasztalat azt mutatja, hogy sokkal ritkábban húznak „rendezett” lottóötöst. Nos az valóban igaz, hogy ritkábban húznak „rendezett” lottóötöst, de ez azért van így, mert kevesebb van belőlük. De ettől egy konkrét „rendezett” lottóötösnek az esélye még ugyanakkora, mint egy konkrét „rendezetlené”. Hogy ezt megértsük gondoljon egy olyan kockára, melynek a hatos oldala piros, a többi fehér. Ekkor azt tapasztaljuk, hogy nagyobb eséllyel dobunk fehér oldalt, mint pirosat, másrészt viszont a hatos és az egyes dobás valószínűségei megegyeznek, pedig a hatos oldal piros, míg az egyes oldal fehér.

Egy másik magyarázat arra, hogy miért kapunk klasszikus esetet: A számoknak itt csak annyi a jelentősége, hogy az egyes golyókat megkülönböztesse. Viszont a számoknak van egy olyan tulajdonsága, aminek a lottóban nincs szerepe, nevezetesen a rendezettség. Ebből fakadóan tűnik egy lottóötös „rendezettnek” vagy „rendezetlennek”.

Most már rátérhetünk a számolásra. Az általunk tippelt öt számból kettőt kell kihúzni, mely $\binom{5}{2}$ módon lehetséges, míg a többi 85-ből hármat, mely $\binom{85}{3}$ módon lehetséges. Így a megoldás

$$\frac{\binom{5}{2}\binom{85}{3}}{\binom{90}{5}} \approx 0{,}0225.$$

Ez azt jelenti, hogy hetenként egy szelvénnyel játszva, hosszú távon átlagosan, kb. 44 hetenként egyszer lesz kettesünk az ötöslottón.

2.5. feladat. Mennyi a valószínűsége, hogy ötöslottón kétszer egymásután ugyanazokat a számokat húzzák ki?

Megoldás. Az első és a második héten is $\binom{90}{5}$ lottóötöst húzhatnak ki, így az Ω elemeinek a száma $\binom{90}{5}^2$. Ebből a kedvező esetek száma $\binom{90}{5} \cdot 1$, hiszen az első héten tetszőlegesen húzhatnak, de a következő héten már csak azt húzhatják, amit előtte. Így a megoldás

$$\frac{\binom{90}{5}}{\binom{90}{5}^2} = \frac{1}{\binom{90}{5}}.$$

2.6. feladat. Egy dobozban 7 piros és 5 fekete golyó van. Ha visszatevés nélkül kivesszük mind a 12 golyót, mennyi annak a valószínűsége, hogy feketét húzunk utoljára?

Megoldás. $\dfrac{5}{12}$

2.7. feladat. Mennyi annak a valószínűsége, hogy 10 kockával dobva pontosan négy darab hatost dobunk?

Megoldás. $\dfrac{\binom{10}{4} \cdot 1^4 \cdot 5^6}{6^{10}} = \binom{10}{4}\left(\dfrac{1}{6}\right)^4\left(\dfrac{5}{6}\right)^6$

2.8. feladat. Egy dobozban 5 piros golyó van. Hány feketét kell hozzátenni, hogy fekete golyó húzásának a valószínűsége nagyobb legyen 0,9-nél?

Megoldás. $\frac{x}{x+5} > 0{,}9$ egyenlőtlenségnek kell teljesülni, ahol x a feketék száma. Ennek megoldása $x > 45$, azaz legalább 46 feketét kell a dobozba tenni.

2.9. feladat. A számjegyeket véletlenszerűen egymásmellé írjuk. Mennyi a valószínűsége, hogy két prímszám között nem lesz prímtől különböző?

Megoldás. A prím számjegyek: 2, 3, 5, 7. Ezeket írjuk egy lapra, a többit pedig külön lapokra. Így 7 darab cetli lesz, amiknek a kisorsolásával úgy tudunk egy véletlenszerű sorrendet előállítani, hogy két prím között nem lesz prímtől különböző. Ugyanakkor a prímeket tartalmazó cetlire 4!-féleképpen írhatjuk fel a számokat, sorrendjüket tekintve. Ezért az eredmény $\frac{4!7!}{10!}$.

2.10. feladat. Nyolc bástyát véletlenszerűen elhelyezünk egy sakktáblán. Mennyi a valószínűsége, hogy egyik sem üti a másikat?

Megoldás. $\dfrac{8!}{\binom{64}{8}}$

2.11. feladat. Hat dobókockát egyszerre feldobva, mennyi a valószínűsége, hogy lesz közöttük legalább két egyforma értékű?

Megoldás. Annak a valószínűsége, hogy minden kockán más érték van $\frac{6!}{6^6}$, így ennek ellenkezője $1 - \frac{6!}{6^6}$ valószínűséggel következhet be.

2.12. feladat. Öt dobókockát egyszerre feldobva, mennyi a valószínűsége, hogy lesz közöttük legalább két egyforma értékű?

Megoldás. Annak a valószínűsége, hogy minden kockán más érték van $\frac{6!}{6^5}$, így ennek ellenkezője $1-\frac{6!}{6^5}$ valószínűséggel következhet be.

2.13. feladat. Egy dobozban 15 papírlap van 1-től 15-ig megszámozva. Találomra kiveszünk 5 lapot. Mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzott legkisebb szám nagyobb 6-nál?

Megoldás. $\frac{\binom{9}{5}}{\binom{15}{5}}$

2.14. feladat. Mi valószínűbb, 6 kockával legalább egy darab egyest vagy 12 kockával legalább két darab egyest dobni?

Megoldás. Annak a valószínűsége, hogy 6 kockával nem dobunk egyest $\frac{5^6}{6^6}$, míg annak esélye, hogy 12 kockával maximum egy darab egyest dobunk $\frac{5^{12}+12\cdot 5^{11}}{6^{12}}$. Az utóbbi nagyobb, ezért az a valószínűbb, hogy 6 kockával legalább egy darab egyest dobunk.

2.15. feladat. Mi a valószínűsége annak, hogy egy 30 fős társaságban nincs két olyan ember, akiknek a születésnapja megegyezik?

Megoldás. $\dfrac{365\cdot 364\cdot \ldots \cdot 336}{365^{30}}=\dfrac{365!}{335!\cdot 365^{30}}\approx 0{,}29.$

2.16. feladat. Egy televíziós vetélkedőben három ajtó közül az egyik mögött autó, a másik kettő mögött kecske található. A játékos a becsukott ajtók közül kiválaszt egyet, majd a játékvezető a másik kettő közül kinyit egy olyat, ami mögött kecske van. A játékos ezután még egyszer dönthet. Az eredetileg kiválasztott ajtónál marad, vagy inkább a másik ajtóra tippel. Vajon mikor nagyobb a valószínűsége annak, hogy nyer a játékos? Ha változtat az első döntésén, vagy ha kitart mellette? Esetleg teljesen mindegy, mert maradnak az esélyek?

Ezt a játékot Monty Hall-dilemmának is nevezik, mert Monty Hall „Let's make a deal” című tévés vetélkedőjében játszották. Marilyn Savant – akinek az IQ-ja 228, ami a valaha mért legnagyobb érték – a váltás mellett érvelt. Azonban a legtöbb matematikus – köztük Erdős Pál – nem tartotta jónak a magyarázatot. Akkor hát mi az igazság?

Megoldás. Ha nem változtat a játékos az első tippen, akkor abban az esetben nyer, ha eltalálta a nyerő ajtót, melynek $\frac{1}{3}$ a valószínűsége. De ha változtat, akkor pontosan abban az esetben nyer, ha elsőre nem találta el a nyerő ajtót, hiszen ekkor a játékvezető a másik rossz ajtót nyitja ki, így amire változtat a játékos, ott biztosan autó van. Ennek valószínűsége $\frac{2}{3}$. Összegezve tehát, igaza volt Marilyn Savantnak, azaz megváltoztatva a tippünket, kétszeresére nő az esélyünk a nyerésre.

Amint látjuk, az ember első reakciójához képest (ami az, hogy a változtatás nem befolyásolhatja a valószínűséget) meglepő a valóság, ugyanakkor nagyon egyszerű a magyarázat. Akkor miért váltott ki Savant érvelése ekkora ellenállást a matematikusok körében? Nos, Savant eredeti magyarázata meglehetősen körülményes és nehezen érthető volt, ugyanakkor a matematikusok első gondolata, miszerint nem változik a valószínűség, annyira nyilvánvalónak tűnt számukra, hogy nem vették a fáradtságot Savant magyarázatának értelmezésére.

3. fejezet

Geometriai valószínűségi mező

A következő definícióban egy geometriai alakzat mértéke a hosszúságot, területet vagy térfogatot jelenti aszerint, hogy egy-, kettő- vagy háromdimenziós.

Definíció

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ olyan valószínűségi mező, melyben Ω pozitív véges mértékű k-dimenziós geometriai alakzat, továbbá

$$\mathrm{P}\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}, \quad \mathrm{P}(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)},$$

ahol m az adott halmaz mértékét jelenti. Ekkor az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$-t *$k$-dimenziós geometriai valószínűségi mezőnek* nevezzük.

Tétel

Ha két kísérletet hajtunk végre egymástól függetlenül, melyeket az $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathrm{P}_1)$ és $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathrm{P}_2)$ egydimenziós geometriai valószínűségi mezők írnak le, akkor ezeket egyszerre modellezhetjük egy olyan kétdimenziós geometriai valószínűségi mezővel, melyben a biztos esemény $\Omega_1 \times \Omega_2$.

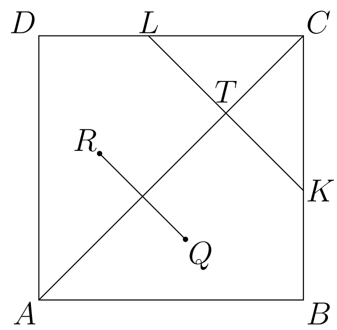
Feladatok

3.1. feladat. Egy egységsugarú körlapban vele koncentrikus 9 darab kört rajzolunk úgy, hogy a kapott 10 rész bármelyikébe egyforma valószínűséggel választhatunk ki pontot. Mekkorák a körök sugarai?

Megoldás. Ha az i. koncentrikus kör sugarát r_i jelöli, akkor $r_i^2\pi - r_{i-1}^2\pi = \frac{\pi}{10}$, azaz $r_i^2 - r_{i-1}^2 = 0{,}1$, ahol $i = 1, 2, \dots, 9$ és $r_0 = 0$. Ebből kapjuk, hogy $r_i = \sqrt{0{,}1i}$, ahol $i = 1, 2, \dots, 9$.

3.2. feladat. Válasszunk véletlenszerűen egy Q pontot egy $ABCD$ egységnégyzet belsejében. Tükrözzük az AC átlóra, a kapott pontot jelöljük R-rel. Legyen S a QR szakasz felezőpontja! Mi a valószínűsége annak, hogy az AS távolság kisebb, mint 1?

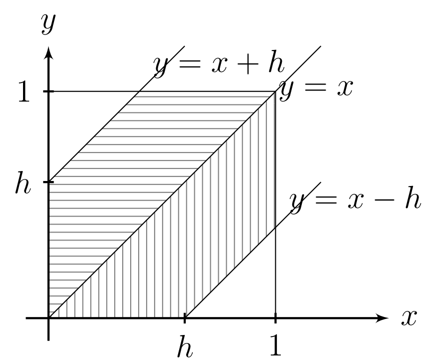
Megoldás. Az AC átlóra mérjünk fel egységnyi távolságot az A ponttól. A kapott pontot jelöljük T-vel. A T pontban állítsunk merőlegest az AC átlóra, amely a DC oldalt az L pontban, a CB oldalt pedig K pontban metszi.



Ekkor a keresett valószínűség az $ABKLD$ ötszög területe, ami $TC = \sqrt{2} - 1$ miatt $1 - (\sqrt{2} - 1)^2 = 2\sqrt{2} - 2$.

3.3. feladat. Egységnyi hosszúságú szakaszon kiválasztunk két pontot. Mi a valószínűsége, hogy a két pont távolsága kisebb egy adott $h < 1$ hosszú szakasznál?

Megoldás. Tekintsük az egyik végpontját az egységnyi hosszúságú szakasznak. A választott P_1 illetve P_2 pontoknak ettől a végponttól való távolsága legyen x illetve y. Ekkor $x, y \in [0, 1]$ teljesül. Feltételezzük, hogy egyetlen pont kiválasztása esetén geometriai valószínűségi mezőről van szó, így a két kísérlet egyszerre is leírható egy kétdimenziós geometriai valószínűségi mezőben, ahol $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$.



Kérdés a $B = \{(x, y) \in \Omega : |y - x| < h\}$ esemény valószínűsége. Az ábrán láthatjuk az Ω-t, melyben a satírozott rész jelöli a B halmazt. Felírva a B és az Ω területeinek a hányadosát, azt kapjuk, hogy $\mathrm{P}(B) = 2h - h^2$.

3.4. feladat. Ketten találkoznak egy adott órában. Egyik a másikra maximum 10 percet vár. Mi a valószínűsége, hogy létrejön a találkozó?

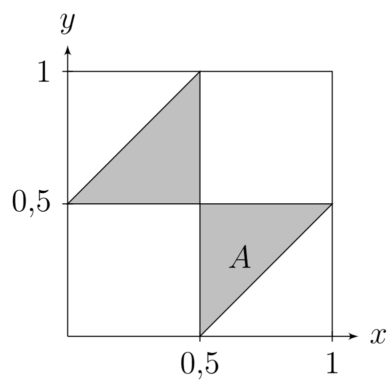
Megoldás. Vegyük észre, hogy ez a 3.3. feladat speciális esete $h = \frac{1}{6}$ választással. Így a valószínűség $\frac{11}{36}$.

3.5. feladat. Egy raktárhoz egy adott órában két szállítmány érkezik, de egyszerre csak az egyik szállítmányt tudják kipakolni, amely 20 percig tart. Mi a valószínűsége, hogy egyik szállítmánynak sem kell a másikra várni?

Megoldás. Ez a 3.3. feladatban megfogalmazott esemény ellentettje $h = \frac{1}{3}$ választással. Így a valószínűség $\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$.

3.6. feladat. Egy pálcát két helyen eltörünk. Mi a valószínűsége, hogy a kapott három pálcából kirakható egy háromszög?

Megoldás. A pálca legyen egységnyi hosszúságú, és a két töréspont távolsága az egyik végponttól legyen x illetve y. Ekkor $x, y \in [0,1]$ miatt $\Omega = [0,1] \times [0,1]$. Ha $x \leq y$, akkor a három pálca hossza x, $y - x$ és $1 - y$. Ezek közül bármely kettő összegének nagyobbnak kell lennie, mint a harmadik. Ezért az $y > 0{,}5$, $y < x + 0{,}5$ és $x < 0{,}5$ egyenlőtlenségeknek egyszerre kell teljesülni. Ha $y < x$, teljesül, akkor az $x > 0{,}5$, $x < y + 0{,}5$ és $y < 0{,}5$ egyenlőtlenségeknek kell egyszerre teljesülni. Tehát a keresett A halmaz



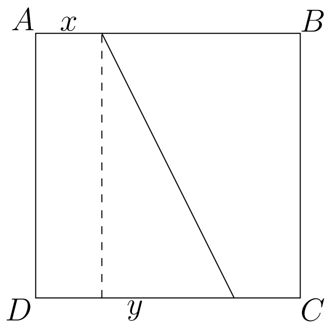
Így $\mathrm{P}(A) = \dfrac{1}{4}$.

3.7. feladat. Válasszunk véletlenszerűen egy x számot a $[0,1]$ intervallumon, és egy y számot a $[0,2]$ intervallumon. Mennyi a valószínűsége, hogy egy x, egy y és egy egységnyi hosszúságú szakaszból háromszög szerkeszthető?

Megoldás. Ekkor $x \in [0,1]$ és $y \in [0,2]$ miatt $\Omega = [0,1] \times [0,2]$. A következő három egyenlőtlenségnek kell teljesülni: $x + y > 1$, $x + 1 > y$ és $y + 1 > x$. A harmadik a feltételekkel mindig teljesül egy 0 területű helyet kivéve, így csak az első kettőt kell vizsgálni. Felrajzolva kapjuk, hogy az $A := \{(x,y) \in \Omega : x + y > 1,\ x + 1 > y\}$ területe 1. Mivel Ω területe 2, ezért a valószínűség 0,5.

3.8. feladat. Egy egységnyi oldalú négyzet két átellenes oldalán találomra választunk egy-egy pontot. Mi a valószínűsége, hogy ezek távolsága kisebb mint 1,3?

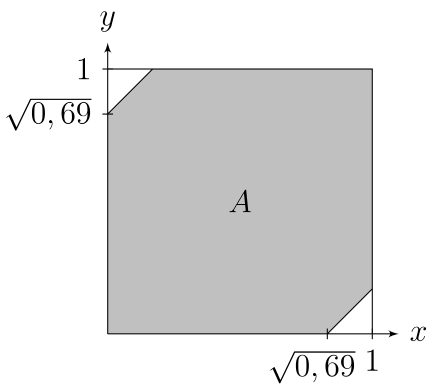
Megoldás. Az $ABCD$ egység oldalú négyzeten az AB és DC oldalakon válasszuk ki a két pontot. Az AB oldalon lévő pontnak az A ponttól mért távolsága legyen x. A DC oldalon lévő pontnak a D ponttól mért távolsága legyen y.



Ekkor $x, y \in [0,1]$ miatt $\Omega = [0,1] \times [0,1]$. A keresett halmaz

$$A = \{(x,y) \in \Omega : (x-y)^2 + 1 < 1{,}3^2\}$$

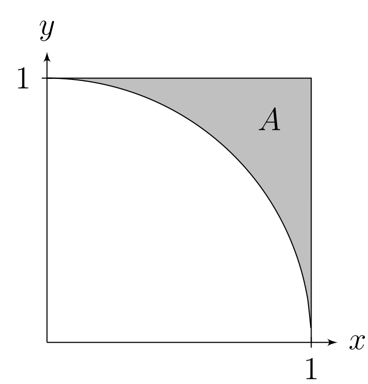
a következő ábrán látható:



Így $\mathrm{P}(A) = 1 - (1 - \sqrt{0{,}69})^2 \approx 0{,}9713$.

3.9. feladat. A $[0,1]$ intervallumon kiválasztunk két számot. Mi a valószínűsége, hogy a négyzetösszegük 1-nél nagyobb?

Megoldás. Legyen a kiválasztott két szám x és y. Ekkor $x, y \in [0,1]$ miatt $\Omega = [0,1] \times [0,1]$. A keresett halmaz $A = \{(x,y) \in \Omega : x^2 + y^2 > 1\}$ a következő ábrán látható:



Így $\mathrm{P}(A) = 1 - \frac{\pi}{4}$.

4. fejezet

Feltételes valószínűség, események függetlensége

Szabályos kockával dobjunk 10-szer. Tegyük fel például, hogy a következő számokat kapjuk:

$$1, 5, 4, 5, 5, 6, 4, 2, 2, 6.$$

Jelölje A azt az eseményt, hogy maximum hármast dobunk, és B azt, hogy páros számot dobunk. Az A, B és $A \cap B$ események relatív gyakoriságait jelöljük rendre $r(A)$, $r(B)$ és $r(A \cap B)$ módon. Ekkor

$$r(A) = \frac{3}{10},\ r(B) = \frac{6}{10},\ r(A \cap B) = \frac{2}{10}.$$

A valószínűség modellezésének bevezetésénél volt egy feltételünk a dobókocka kísérlet végrehajtásánál. Abban az esetben, amikor élére esik a kocka, a dobást ne vegyük számításba. Most ezt a feltételt tovább bővítjük. Akkor se vegyük számításba a dobást, ha nem páros számot dobunk, azaz nem a B következik be. Így már csak 6 érvényes dobásunk van:

$$\cancel{1}, \cancel{5}, 4, \cancel{5}, \cancel{5}, 6, 4, 2, 2, 6.$$

Ebben a módosított kísérletben az A esemény nem 3-szor, hanem csak kétszer következett be, így a relatív gyakorisága $\frac{2}{6}$. Ezt jelöljük $r(A \mid B)$-vel. Tehát most

$$r(A \mid B) = \frac{2}{6}.$$

Ez a relatív gyakoriság pontosan olyan tulajdonságot fog mutatni, mint az eredeti relatív gyakoriság, azaz sok kísérlet esetén egy bizonyos érték körül fog ingadozni. Ezt az értéket az A esemény B-re vonatkozó feltételes valószínűségének nevezzük, továbbá $\mathrm{P}(A \mid B)$ módon jelöljük.

Hogyan lehet ezt a feltételes valószínűséget kiszámolni az eredeti valószínűségi mezőben? Az $r(A \mid B)$ értéke úgy jött ki, hogy a nevezőben csak a B bekövetkezéseinek a számát, azaz B gyakoriságát írtuk, míg a számlálóba az A-nak azon bekövetkezéseit írtuk, amikor B is bekövetkezett, hiszen a többit töröltük. Így teljesül a következő:

$$r(A \mid B) = \frac{r(A \cap B)}{r(B)}.$$

A modellünkben tehát a feltételes valószínűség a következő módon definiálható:

Definíció

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező, $A, B \in \mathcal{F}$ és $\mathrm{P}(B) \neq 0$. A

$$\mathrm{P}(A \mid B) := \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

számot, az A *esemény* B-re *vonatkozó feltételes valószínűségének* nevezzük.

Tétel Szorzattétel

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező, $A, B \in \mathcal{F}$ és $\mathrm{P}(B) \neq 0$. Ekkor

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A \mid B)\,\mathrm{P}(B).$$

Jelentse A azt, hogy dobókockával elsőre hatost, illetve B azt, hogy másodikra hatost dobunk, azaz $A := \{(6,1), (6,2), \ldots, (6,6)\}$ és $B := \{(1,6), (2,6), \ldots, (6,6)\}$. Ekkor $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \mid B) = \frac{1}{6}$, vagyis A-nak a valószínűsége, függetlenül attól, hogy a B feltétellel vizsgáljuk vagy anélkül, mindig $\frac{1}{6}$.

A továbbiakban, ha $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \mid B)$ teljesül, akkor azt mondjuk, hogy A független B-től. Könnyű ellenőrizni, hogy B is független A-tól, hiszen $\mathrm{P}(B) = \frac{6}{36}$ és $\mathrm{P}(B \mid A) = \frac{1}{6}$, tehát megegyeznek. A függetlenségnek ez a szimmetria tulajdonsága általánosan is igaz, azaz A pontosan akkor független B-től, ha B független A-tól.

Vegyük észre, hogy $\mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B) \neq 0$ esetén a függetlenség fogalma ekvivalens azzal, hogy $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)$. Ez a képlet akkor is alkalmazható, ha $\mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B) = 0$, másrészt a szimmetria azonnal látható belőle. Ezért a továbbiakban ezt fogadjuk el a függetlenség definíciójának.

Definíció

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező és $A, B \in \mathcal{F}$. Azt mondjuk, hogy az A és B események *függetlenek*, ha

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B).$$

Feladatok

4.1. feladat. Két kockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7, feltéve, hogy a dobott számok összege páratlan?

Megoldás. Jelentse A azt az eseményt, hogy a dobott számok összege 7, B pedig azt, hogy páratlan. Ekkor $A \subset B$ miatt $A \cap B = A$, így

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B)}.$$

Mivel $\mathrm{P}(A) = \frac{6}{6^2} = \frac{1}{6}$ és $\mathrm{P}(B) = \frac{1}{2}$, ezért $\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{1}{3}$.

4.2. feladat. Három kockával dobunk. Mekkora a valószínűsége, hogy az egyik kockával hatost dobunk, feltéve, hogy a dobott számok összege 12?

Megoldás. Jelölje A azt az eseményt, hogy az egyik kockán hatos van, és B azt, hogy a dobott számok összege 12. Ekkor

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\frac{15}{6^3}}{\frac{25}{6^3}} = \frac{3}{5}.$$

4.3. feladat. Két kockával addig dobunk, amíg legalább az egyik hatost nem mutat. Mi a valószínűsége, hogy ekkor a másik is hatost mutat?

Megoldás. Jelölje A azt az eseményt, hogy mindkét kocka hatost mutat, míg B azt, hogy legalább az egyik kocka hatos. Ekkor $\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{11}{36}} = \frac{1}{11}$.

4.4. feladat. Részeges Rezső a nap harmadát kocsmában tölti. A faluban négy kocsma van, bármelyikben előfordulhat ugyanakkora eséllyel. Egyszer elindulunk, hogy megkeressük. Három kocsmát már végigjártunk, de nem találtuk. Mi a valószínűsége, hogy a negyedikben lesz?

Megoldás. Jelentse A_i azt az eseményt, hogy az általunk i-ediknek felkeresett kocsmában van Rezső. Ekkor $\mathrm{P}(A_i) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$. Így

$$\mathrm{P}(A_4 \mid \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_2}) = \frac{\mathrm{P}(A_4 \cap \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_2})}{\mathrm{P}(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_2})} = \frac{\mathrm{P}(A_4)}{\mathrm{P}(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3})} =$$

$$= \frac{\mathrm{P}(A_4)}{1 - \mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3)} = \frac{\mathrm{P}(A_4)}{1 - \mathrm{P}(A_1) - \mathrm{P}(A_2) - \mathrm{P}(A_3)} = \frac{\frac{1}{12}}{1 - \frac{3}{12}} = \frac{1}{9}.$$

4.5. feladat. Két dobozból az elsőben 3 piros és 4 fekete, a másodikban pedig 4 piros és 5 fekete golyó van. Az első dobozból átteszünk egy golyót a másodikba, majd a másodikból választunk ki egy golyót. Mennyi a valószínűsége, hogy mindkét alkalommal pirosat húzunk?

Megoldás. Jelölje A azt az eseményt, hogy másodikra pirosat húzunk, B pedig azt, hogy elsőre pirosat húzunk. Ekkor a szorzattétel alapján

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A \mid B)\,\mathrm{P}(B) = \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{70}.$$

4.6. feladat. Egy dobozban 2 fehér és 4 fekete golyó van. Visszatevés nélkül kiveszünk négy golyót. Jelentse A azt az eseményt, hogy az első kihúzott golyó fekete. A B esemény jelentse azt, hogy az utolsónak kivett golyó fekete. Függetlenek-e A és B?

Megoldás. $\mathrm{P}(A) = \frac{4}{6}$, $\mathrm{P}(B) = \frac{4}{6}$, $\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{4 \cdot 3}{6 \cdot 5}$, azaz $\mathrm{P}(A \cap B) \neq \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)$. Így A és B események nem függetlenek.

4.7. feladat. Mi a valószínűsége, hogy egy kockával kétszer dobva másodikra hatost dobunk, feltéve, hogy elsőre hatost dobtunk? A két esemény független-e egymástól?

Megoldás. Jelölje A azt, hogy másodikra hatost dobunk, B pedig azt, hogy elsőre hatost dobunk. Ekkor

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{1}{6},$$

másrészt

$$\mathrm{P}(A) = \frac{6}{36}.$$

Így $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \mid B)$, azaz A és B függetlenek.

4.8. feladat. Az 52 lapos francia kártyából kihúzunk egy lapot. Független-e az ász húzása a kőr húzásától?

Megoldás. Jelölje A azt, hogy ászt húzunk, B pedig azt, hogy kőrt húzunk. Ekkor $\mathrm{P}(A) = \frac{4}{52}$, $\mathrm{P}(B) = \frac{13}{52}$ és $\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{52}$. Ebből kapjuk, hogy $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)$, azaz A és B függetlenek.

5. fejezet

Teljes valószínűség tétele

Definíció

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező. Azt mondjuk, hogy $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{F}$ *teljes eseményrendszer*, $B_i \cap B_j = \emptyset$ minden $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$ esetén, továbbá $B_1 \cup \dots \cup B_n = \Omega$. Másképpen fogalmazva, ekkor a $B_1, \dots, B_n$ események közül minden esetben pontosan egy teljesül.

Tétel Teljes valószínűség tétele

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező, $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{F}$ teljes eseményrendszer, és $\mathrm{P}(B_i) \neq 0$ minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén. Ekkor bármely $A \in \mathcal{F}$ eseményre

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A \mid B_i)\,\mathrm{P}(B_i).$$

Ha valamely A eseményt mint okozatot tekintjük, amit a $B_1, \dots, B_n$ okok válthatnak ki, akkor ismerve az okok valószínűségeit és hatásukat az okozat bekövetkezésére, azaz a $\mathrm{P}(A \mid B_i)$ értékeket tudva, a teljes valószínűség tétele értelmében az okozat valószínűsége meghatározható.

Feladatok

5.1. feladat. Egy céllövöldében 6 puska van. Ezek közül 3 darab 0,5 valószínűséggel talál célba, 1 darab 0,7-del és 2 darab 0,8-del. Mi a valószínűsége, hogy célba találunk, ha a puskát találomra választjuk ki?

Megoldás. Jelölje A azt az eseményt, hogy célba találunk, B_1, hogy 0,5-es, B_2, hogy 0,7-es, végül B_3, hogy 0,8-es puskát választunk. Ekkor

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{P}(A \mid B_i)\,\mathrm{P}(B_i) = 0{,}5 \cdot \frac{3}{6} + 0{,}7 \cdot \frac{1}{6} + 0{,}8 \cdot \frac{2}{6}.$$

5.2. feladat. Két doboz mindegyikében 100-100 darab csavar van. Az első dobozban 10 db selejtes, a másodikban 6. A dobozok közül egyenlő valószínűséggel kiválasztjuk valamelyiket, amelyből találomra kiveszünk egy csavart. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ez a csavar jó?

Megoldás. Jelölje B_1 azt az eseményt, hogy az első dobozból húzunk, míg B_2 azt, hogy a másodikból, illetve A azt, hogy a kiválasztott csavar jó. Ekkor B_1 és B_2 teljes eseményrendszert alkot, így a teljes valószínűség tétele értelmében

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \mid B_1)\,\mathrm{P}(B_1) + \mathrm{P}(A \mid B_2)\,\mathrm{P}(B_2) = \frac{90}{100} \cdot \frac{1}{2} + \frac{94}{100} \cdot \frac{1}{2}.$$

5.3. feladat. Egy gyárban a legyártott termékeket százasával csomagolják dobozokba. A legyártott dobozok $\frac{1}{6}$ részében 0 darab termék hibás, $\frac{5}{12}$ részében 1 darab termék hibás, $\frac{1}{4}$ részében 2 darab termék hibás, $\frac{1}{12}$ részében 3 darab termék hibás, és a fennmaradó $\frac{1}{12}$ részében 4 darab termék hibás. A dobozok közül véletlenszerűen válasszunk ki egyet, majd abból emeljünk ki egy műszert. Mi a valószínűsége, hogy hibátlan műszert választottunk?

Megoldás. Jelölje A azt az eseményt, hogy hibátlan műszert választottunk, B_i, hogy olyan dobozból választunk, amelyben 100-ból i darab rossz. Ekkor

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i=0}^{4} \mathrm{P}(A \mid B_i)\,\mathrm{P}(B_i) = \frac{100}{100} \cdot \frac{1}{6} + \frac{99}{100} \cdot \frac{5}{12} + \frac{98}{100} \cdot \frac{1}{4} + \frac{97}{100} \cdot \frac{1}{12} + \frac{96}{100} \cdot \frac{1}{12}.$$

5.4. feladat. Két doboz közül az elsőben 3 piros és 4 fekete, a másodikban pedig 2 piros és 3 fekete golyó van. Az első dobozból átteszünk a másodikba egy golyót, majd a másodikból választunk ki egy golyót. Mi a valószínűsége, hogy másodjára piros golyót húzunk ki?

Megoldás. Jelölje B_1, hogy elsőre pirosat, B_2, hogy elsőre feketét és A, hogy másodikra pirosat húzunk. Ekkor

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i=1}^{2} \mathrm{P}(A \mid B_i)\,\mathrm{P}(B_i) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{7} + \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{7}.$$

5.5. feladat. Két doboz közül az elsőben 3 piros és 4 fekete, a másodikban pedig 2 piros és 3 fekete golyó van. Az első dobozból átteszünk a másodikba két golyót, majd a másodikból választunk ki egy golyót. Mi a valószínűsége, hogy a második dobozból piros golyót húzunk ki?

Megoldás. Jelölje B_1, hogy elsőre két pirosat, B_2, hogy elsőre két feketét, B_3, hogy elsőre egy pirosat és egy feketét, továbbá A, hogy másodikra pirosat húzunk. Ekkor

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{P}(A \mid B_i)\,\mathrm{P}(B_i) = \frac{4}{7} \cdot \frac{\binom{3}{2}}{\binom{7}{2}} + \frac{2}{7} \cdot \frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}} + \frac{3}{7} \cdot \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{1}}{\binom{7}{2}}.$$

6. fejezet

Bayes tétele

Tétel Bayes tétele

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező, $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{F}$ teljes eseményrendszer, és $\mathrm{P}(B_i) \neq 0$ minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén. Ha $A \in \mathcal{F}$ és $\mathrm{P}(A) \neq 0$, akkor bármely $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén

$$\mathrm{P}(B_i \mid A) = \frac{\mathrm{P}(A \mid B_i)\,\mathrm{P}(B_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A \mid B_k)\,\mathrm{P}(B_k)}.$$

Ha az A esemény bekövetkezik, amit a $B_1, \ldots, B_n$ okok válthatnak ki, akkor ismerve az okok valószínűségeit és hatásukat az A bekövetkezésére, azaz a $\mathrm{P}(A \mid B_i)$ értékeket tudva, Bayes tételével következtethetünk arra, hogy egy kiválasztott ok milyen valószínűséggel szerepelt az A létrejöttében. Ilyen értelemben Bayes tétele megfordítása a teljes valószínűség tételének.

Feladatok

6.1. feladat. Egy üzemben három gép dolgozik. Az első a termelés 25 %-át adja és 5 %-os selejt aránnyal dolgozik. A második 35 %-ot termel 4 %-os selejt aránnyal, végül a harmadik 2 %-os selejt aránnyal dolgozik. A termékek közül kiválasztunk egyet véletlenszerűen, és azt tapasztaljuk, hogy az selejtes. Mennyi a valószínűsége, hogy az első gép gyártotta?

Megoldás. Jelölje B_i, hogy a kiválasztott terméket az i-edik gép gyártotta és A azt, hogy a kiválasztott termék selejtes. Ekkor

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B_1 \mid A) &= \frac{\mathrm{P}(A \mid B_1)\,\mathrm{P}(B_1)}{\mathrm{P}(A \mid B_1)\,\mathrm{P}(B_1) + \mathrm{P}(A \mid B_2)\,\mathrm{P}(B_2) + \mathrm{P}(A \mid B_3)\,\mathrm{P}(B_3)} = \\ &= \frac{0{,}05 \cdot 0{,}25}{0{,}05 \cdot 0{,}25 + 0{,}04 \cdot 0{,}35 + 0{,}02 \cdot 0{,}4}.\end{aligned}$$

6.2. feladat. Tegyük fel, hogy valamely üzemből kikerülő áru 0,75 valószínűséggel első osztályú. A kikerült terméket vizsgálatnak vetik alá. Annak valószínűsége, hogy a vizsgálat során egy első osztályú terméket nem első osztályúnak minősítenek 0,02. Annak valószínűsége viszont, hogy egy nem első osztályút első osztályúnak minősítenek 0,05.

(1) Mennyi a valószínűsége, hogy egy olyan termék, amely a vizsgálaton első osztályú minősítést kapott, valóban első osztályú?

(2) Mennyi a valószínűsége, hogy egy olyan termék, amely a vizsgálaton nem első osztályú minősítést kapott, valóban nem első osztályú?

Megoldás. Jelölje B_1 azt, hogy a kiválasztott termék valójában első osztályú, B_2 azt, hogy valójában nem első osztályú, és A azt, hogy a kiválasztott termék első osztályú minősítést kapott. Ekkor

$$\mathrm{P}(B_1 \mid A) = \frac{\mathrm{P}(A \mid B_1)\,\mathrm{P}(B_1)}{\mathrm{P}(A \mid B_1)\,\mathrm{P}(B_1) + \mathrm{P}(A \mid B_2)\,\mathrm{P}(B_2)} = \frac{0{,}98 \cdot 0{,}75}{0{,}98 \cdot 0{,}75 + 0{,}05 \cdot 0{,}25}$$

és

$$\mathrm{P}(B_2 \mid \overline{A}) = \frac{\mathrm{P}(\overline{A} \mid B_2)\,\mathrm{P}(B_2)}{\mathrm{P}(\overline{A} \mid B_1)\,\mathrm{P}(B_1) + \mathrm{P}(\overline{A} \mid B_2)\,\mathrm{P}(B_2)} = \frac{0{,}95 \cdot 0{,}25}{0{,}02 \cdot 0{,}75 + 0{,}95 \cdot 0{,}25}.$$

6.3. feladat. Igazfalvában a lakosok 80 %-a mindig igazat mond, a többiek pedig mindig hazudnak. A mellette található Hazugfalvában a lakosok 90 %-a mindig hazudik, a többiek pedig mindig igazat mondanak. Egy vándor eltéved valamelyik faluba a kettő közül, de nem tudja melyikben van. Ezért az első lakost, akivel találkozik, megkérdezi, hogy ez melyik falu. Azt a választ kapja, hogy Igazfalvában vannak. Mi a valószínűsége, hogy a vándor valójában Hazugfalvába tévedt?

Megoldás. Jelölje B_1 azt az eseményt, hogy a vándor Igazfalvában van, B_2, hogy Hazugfalvában van és A azt, hogy a lakos azt mondja, hogy Igazfalvában vannak. Ekkor

$$\mathrm{P}(B_2 \mid A) = \frac{\mathrm{P}(A \mid B_2)\,\mathrm{P}(B_2)}{\mathrm{P}(A \mid B_1)\,\mathrm{P}(B_1) + \mathrm{P}(A \mid B_2)\,\mathrm{P}(B_2)} = \frac{0{,}9 \cdot \frac{1}{2}}{0{,}8 \cdot \frac{1}{2} + 0{,}9 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{9}{17}.$$

6.4. feladat. Az I. érme feldobásakor 0,4 valószínűséggel kapunk fejet, míg a II. érme feldobásakor ugyanez a valószínűség 0,7. A két érme közül egyet véletlenszerűen kiválasztunk és feldobunk. Feltéve, hogy fejet dobunk, mi a valószínűsége, hogy az I. érmével tettük ezt?

Megoldás. Jelölje A azt az eseményt, hogy a kiválasztott érmével fejet dobunk, B_1, hogy az I. érmét választottuk, B_2 pedig, hogy a II. érmét választottuk. Ekkor

$$\mathrm{P}(B_1 \mid A) = \frac{\mathrm{P}(A \mid B_1)\,\mathrm{P}(B_1)}{\mathrm{P}(A \mid B_1)\,\mathrm{P}(B_1) + \mathrm{P}(A \mid B_2)\,\mathrm{P}(B_2)} = \frac{0{,}4 \cdot \frac{1}{2}}{0{,}4 \cdot \frac{1}{2} + 0{,}7 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{4}{11}.$$

6.5. feladat. Egy tanár a vizsgán tesztet töltet ki a hallgatókkal. A tesztlapon minden kérdéshez három válasz van feltüntetve, melyek közül csak egy helyes. Tegyük fel, hogy a vizsgázó 0,8 valószínűséggel tudja a helyes választ egy kérdésre. Ha nem tudja, akkor bármely választ egyforma eséllyel bejelölheti. Ha egy kérdésre helyesen válaszol a hallgató, akkor mi a valószínűsége, hogy ennek az az oka, hogy valóban tudta a választ?

Megoldás. Jelölje A azt az eseményt, hogy a hallgató helyesen válaszol az adott kérdésre, B_1, hogy a hallgató tudja a helyes választ, B_2 pedig azt, hogy nem. Ekkor

$$\mathrm{P}(B_1 \mid A) = \frac{\mathrm{P}(A \mid B_1)\,\mathrm{P}(B_1)}{\mathrm{P}(A \mid B_1)\,\mathrm{P}(B_1) + \mathrm{P}(A \mid B_2)\,\mathrm{P}(B_2)} = \frac{1 \cdot 0{,}8}{1 \cdot 0{,}8 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}2} = \frac{12}{13}.$$

6.6. feladat. Egy városban a lakosság 0,5 %-át megfertőzött egy ritka vírus. Egy teszt a vizsgálati személyek 99 %-ról helyesen el tudja dönteni, hogy fertőzött vagy egészséges, de 1 %-ban téved. Mekkora a valószínűsége, hogy egy megvizsgált személy egészséges, ha a teszt szerint fertőzött? Ha a teszt szerint fertőzött valaki, akkor letesztelik még egyszer. Ha a második teszt szerint is fertőzött az illető, akkor mi a valószínűsége, hogy valójában egészséges?

Megoldás. Jelölje A_1 azt az eseményt, hogy a vizsgált személy az első teszt szerint fertőzött, A_2, hogy mindkét teszt szerint fertőzött, B_1, hogy a vizsgált személy egészséges, B_2 pedig azt, hogy fertőzött. Ekkor

$$\mathrm{P}(B_1 \mid A_1) = \frac{\mathrm{P}(A_1 \mid B_1)\,\mathrm{P}(B_1)}{\mathrm{P}(A_1 \mid B_1)\,\mathrm{P}(B_1) + \mathrm{P}(A_1 \mid B_2)\,\mathrm{P}(B_2)} = \frac{0{,}01 \cdot 0{,}995}{0{,}01 \cdot 0{,}995 + 0{,}99 \cdot 0{,}005}$$

ami kb. 0,6678, ami azt jelenti, hogy ha az első teszt valakit fertőzöttnek talál, akkor nagyobb az esélye annak, hogy valójában egészséges. Másrészt

$$\mathrm{P}(B_1 \mid A_2) = \frac{\mathrm{P}(A_2 \mid B_1)\,\mathrm{P}(B_1)}{\mathrm{P}(A_2 \mid B_1)\,\mathrm{P}(B_1) + \mathrm{P}(A_2 \mid B_2)\,\mathrm{P}(B_2)} = \frac{0{,}01^2 \cdot 0{,}995}{0{,}01^2 \cdot 0{,}995 + 0{,}99^2 \cdot 0{,}005}$$

ami kb. 0,0199. Tehát azon személyeknek, akiknél mindkét teszt pozitív volt, már csak kb. 2 %-a egészséges. Három teszt esetén ugyanez az arány csak 0,2 ‰.

7. fejezet

Valószínűségi változó

Egy játékban 10 forintot nyerünk, ha egy pénzérme a fej oldalára esik, ellenkező esetben pedig 5 forintot veszítünk. Ebben a kísérletben a biztos esemény $\Omega = \{\text{fej}, \text{írás}\}$. Az előbbi játékszabály leírható egy olyan függvénnyel, amely a fejhez 10-et rendel, míg az íráshoz -5-öt. A továbbiakban azokat a függvényeket, melyek az Ω elemeihez valós számokat rendelnek – bizonyos feltétellel –, valószínűségi változónak fogunk nevezni. A definíció előtt vezessük be a következő jelöléseket:

Jelölés

Legyen Ω nem üres halmaz, $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ és $x \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$\{\xi = x\}$$

jelölje azon $\omega \in \Omega$ elemek halmazát, melyekre $\xi(\omega) = x$. Hasonlóan definiálhatjuk a $\{\xi < x\}$, $\{\xi > x\}$, $\{\xi = \eta\}$, $\{\xi < \eta\}$ stb. halmazokat is, ahol $\eta\colon \Omega \to \mathbb{R}$. (A ξ és η görög betűk kiejtése *kszí* illetve *éta*.) Ha $\{\xi = x\}$ esemény az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ valószínűségi mezőben, akkor annak valószínűségét $\mathrm{P}(\{\xi = x\})$ helyett $\mathrm{P}(\xi = x)$-szel jelöljük. Hasonlóan járunk el a többi előbb említett halmaz valószínűségeinek jelöléseinél is. A ξ függvény értékkészletét R_ξ-vel fogjuk jelölni.

Definíció

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező és $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Ha $\{\xi < x\} \in \mathcal{F}$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, akkor ξ-t *valószínűségi változónak* nevezzük.

Definíció

Egy valószínűségi változót *diszkrét valószínűségi változónak* nevezzük, ha az értékkészletének számossága megszámlálható.

Definíció

Ha ξ diszkrét valószínűségi változó, akkor azt a függvényt, amely minden $k \in R_\xi$-hez hozzárendeli a $\mathrm{P}(\xi = k)$ valószínűséget, a ξ *eloszlásának* nevezzük.

Az eloszlás csak diszkrét esetben jellemzi megfelelően a valószínűségi változót. Általános esetben az úgynevezett eloszlásfüggvény ad elegendő információt.

Definíció

A ξ valószínűségi változó *eloszlásfüggvényének* az

$$F_\xi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F_\xi(x) := \mathrm{P}(\xi < x)$$

függvényt nevezzük.

A valószínűségi változó definíciója miatt minden valószínűségi változónak létezik eloszlásfüggvénye. Diszkrét esetben mégis az eloszlást használjuk, mert annak felírása egyszerűbb. Diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvényének az értékkészlete megszámlálható.

Tétel

Ha ξ egy valószínűségi változó és $a < b$ tetszőleges valós számok, akkor

$$\mathrm{P}(a \le \xi < b) = F_\xi(b) - F_\xi(a).$$

Feladatok

7.1. feladat. Határozzuk meg az ötöslottón a találatok számának eloszlását!

Megoldás. $\mathrm{P}(\xi = k) = \dfrac{\binom{5}{k}\binom{85}{5-k}}{\binom{90}{5}}$ $(k = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$, ahol ξ a találatok számát jelöli.

7.2. feladat. Két kockával dobva a dobott számok összegének határozzuk meg az eloszlását!

Megoldás. Jelölje xy azt, hogy az első kockán x, a második kockán pedig y az eredmény, továbbá $\xi := x + y$. Ekkor az Ω elemei

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

Vegyük észre, hogy a ξ különböző értékeire a hozzá tartozó elemek átlósan helyezkednek el az előbbi elrendezésben. Például $\xi = 4$ a 31, 22 és 13 esetekben teljesül. Így

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(\xi = 2) = \mathrm{P}(\xi = 12) = \frac{1}{36},\\
&\mathrm{P}(\xi = 3) = \mathrm{P}(\xi = 11) = \frac{2}{36},\\
&\mathrm{P}(\xi = 4) = \mathrm{P}(\xi = 10) = \frac{3}{36},\\
&\mathrm{P}(\xi = 5) = \mathrm{P}(\xi = 9) = \frac{4}{36},\\
&\mathrm{P}(\xi = 6) = \mathrm{P}(\xi = 8) = \frac{5}{36},\\
&\mathrm{P}(\xi = 7) = \frac{6}{36}.
\end{aligned}$$

7.3. feladat. Két kockával dobva a dobott számok különbségének abszolút értéke legyen ξ. Határozzuk meg az eloszlását!

Megoldás. $\mathrm{P}(\xi = 0) = \frac{6}{36}$, $\mathrm{P}(\xi = 1) = \frac{10}{36}$, $\mathrm{P}(\xi = 2) = \frac{8}{36}$, $\mathrm{P}(\xi = 3) = \frac{6}{36}$, $\mathrm{P}(\xi = 4) = = \frac{4}{36}$, $\mathrm{P}(\xi = 5) = \frac{2}{36}$.

7.4. feladat. Egy kockát addig dobunk, míg hatost nem kapunk. Határozzuk meg a dobások számának eloszlását!

Megoldás. $\mathrm{P}(\xi = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6}$ $(k = 1, 2, \dots)$, ahol ξ a dobások száma.

7.5. feladat. Egy dobozban 9 fehér és 6 fekete golyó van. Hármat kiveszünk visszatevés nélkül. Legyen ξ a kihúzott fehérek száma. Adjuk meg az eloszlását!

Megoldás. $\mathrm{P}(\xi = 0) = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{15}{3}} = \frac{20}{455}$, $\mathrm{P}(\xi = 1) = \frac{9\cdot\binom{6}{2}}{\binom{15}{3}} = \frac{135}{455}$, $\mathrm{P}(\xi = 2) = \frac{\binom{9}{2}\cdot 6}{\binom{15}{3}} = \frac{216}{455}$, $\mathrm{P}(\xi = 3) = \frac{\binom{9}{3}}{\binom{15}{3}} = \frac{84}{455}$.

7.6. feladat. Három kockával dobunk egyszerre. Számítsa ki a dobott számok összegének eloszlásfüggvényét az $x = 5{,}2$ helyen!

Megoldás. $F_\xi(5{,}2) = \mathrm{P}(\xi < 5{,}2) = \mathrm{P}(\xi = 5) = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$, ahol ξ a dobott számok összege.

7.7. feladat. Ketten megbeszélik, hogy este 8 és 9 óra között találkoznak. Mi a várakozási idő eloszlásfüggvénye?

Megoldás. A 3.3. feladat szerint, ha ξ a várakozási idő, akkor

$$F_\xi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0,\\ 2x - x^2, & \text{ha } 0 \le x \le 1,\\ 1, & \text{ha } x > 1. \end{cases}$$

7.8. feladat. Legyen $\Omega := [a, b]$, ahol $a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ geometriai valószínűségi mező, továbbá $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $\xi(\omega) := \omega$. Határozzuk meg ξ eloszlásfüggvényét!

Megoldás. $F_\xi(x) = \mathrm{P}(\xi < x) = \frac{x-a}{b-a}$, ha $x \in [a, b]$, $F_\xi(x) = 0$, ha $x < a$ és $F_\xi(x) = 1$, ha $x > b$.

7.9. feladat. Legyen Ω egy egységnyi sugarú körlap és $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ geometriai valószínűségi mező. Jelölje ξ a kiválasztott pontnak a kör középpontjától mért távolságát. Határozzuk meg ξ eloszlásfüggvényét!

Megoldás. $F_\xi(x) = \mathrm{P}(\xi < x) = \frac{x^2\pi}{\pi} = x^2$, ha $x \in [0, 1]$, $F_\xi(x) = 0$, ha $x < 0$ és $F_\xi(x) = 1$, ha $x > 1$.

8. fejezet

Várható érték és szórásnégyzet

Egy kockajátékban 2 forintot veszítünk, ha 1-est, 2-est vagy 3-ast dobunk, 3 forintot veszítünk, ha 4-est vagy 5-öst dobunk, továbbá 6 forintot nyerünk, ha 6-ost dobunk. Kérdés, hogy hosszú távon nyerünk vagy vesztünk? Például, ha ötször játszunk és a dobássorozat eredménye 2, 6, 1, 2, 4, akkor egy játékban átlagban $(-2+6-2-2-{}$ $-\,3):5=-0{,}6$ forintot „nyertünk”, azaz 0,6 forintot veszítettünk. Ezt általánosítva, ha n dobásból k_1-szer veszítünk 2 forintot, k_2-ször veszítünk 3 forintot és k_3-szor nyerünk 6 forintot, akkor egy játékban az átlagos nyereményünk

$$\frac{-2\cdot k_1+(-3)\cdot k_2+6\cdot k_3}{n}=-2\cdot\frac{k_1}{n}+(-3)\cdot\frac{k_2}{n}+6\cdot\frac{k_3}{n}.$$

A későbbiekben tárgyalt Bernoulli-féle nagy számok törvénye pontosan azt fejezi ki, mint a jegyzet bevezetésében leírt gyakorlati tapasztalat, vagyis nagy számú kísérlet esetén a relatív gyakoriság a valószínűség körül ingadozik. Így

$$\begin{aligned}-2\cdot\frac{k_1}{n}+(-3)\cdot\frac{k_2}{n}+6\cdot\frac{k_3}{n}&\approx -2\,\mathrm{P}(\xi=-2)+(-3)\,\mathrm{P}(\xi=-3)+6\,\mathrm{P}(\xi=6)=\\&=-2\cdot\frac{1}{2}-3\cdot\frac{1}{3}+6\cdot\frac{1}{6}=-1,\end{aligned}$$

ahol ξ az egy játékbeli nyereményt jelenti. Ezt a számot a ξ várható értékének nevezzük. Nagy számú független megfigyelés esetén az átlag a várható érték körül ingadozik, ezért jogos az elnevezés. Mivel ez most negatív, ezért ezt a játékot hosszútávon nem éri meg játszani.

Definíció

Legyen ξ diszkrét valószínűségi változó és $R_\xi=\{x_1,\dots,x_m\}$. Ekkor az

$$\mathrm{E}\,\xi:=\sum_{k=1}^{m}x_k\,\mathrm{P}(\xi=x_k)$$

értéket ξ *várható értékének* nevezzük.

Tetszőleges ξ esetén úgy kaphatunk analóg formulát, ha ξ-t kis intervallumokon az intervallum alsó végpontjával helyettesítjük. Például $x_1<x_2<\cdots<x_m$

osztópontokkal megadott beosztás esetén a várható értéket közelítsük az

$$x_1 \operatorname{P}(x_1 \le \xi < x_2) + \cdots + x_{m-1} \operatorname{P}(x_{m-1} \le \xi < x_m) + x_m \operatorname{P}(x_m \le \xi)$$

összeggel. A közelítés annál pontosabb, minél kisebbek a beosztás osztópontjai között a távolságok. A beosztás finomításával kapott $\operatorname{E}\xi$ határértéket fogjuk a ξ várható értékének nevezni.

Tétel

Legyenek ξ és η tetszőleges valószínűségi változók és $a, b, c \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$\operatorname{E}(a\xi + b\eta + c) = a \operatorname{E}\xi + b \operatorname{E}\eta + c.$$

Ezután egy valószínűségi változónak a várható értéke körüli ingadozását jellemezzük.

Definíció

Legyen ξ valószínűségi változó. Ekkor a

$$\operatorname{D}^2 \xi := \operatorname{E}(\xi - \operatorname{E}\xi)^2$$

értéket ξ *szórásnégyzetének* nevezzük.

Tétel

Ha ξ valószínűségi változó, akkor

$$\operatorname{D}^2 \xi = \operatorname{E}\xi^2 - \operatorname{E}^2 \xi.$$

Tétel

Ha ξ diszkrét valószínűségi változó és $R_\xi = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, akkor

$$\operatorname{E}\xi^2 = \sum_{k=1}^{m} x_k^2 \operatorname{P}(\xi = x_k).$$

Tétel

Ha ξ valószínűségi változó és $a, b \in \mathbb{R}$, akkor

$$\operatorname{D}^2(a\xi + b) = a^2 \operatorname{D}^2 \xi.$$

Feladatok

8.1. feladat. Ruletten 1000 eurót felteszünk a pirosra. Mennyi a nyereményünk várható értéke és szórásnégyzete?

Megoldás. Jelölje ξ a nyereményünk értékét euróban. Ekkor

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\,\xi &= 1000 \cdot \frac{18}{37} + (-1000) \cdot \frac{19}{37} = -\frac{1000}{37}\\
\mathrm{E}\,\xi^2 &= 1000^2 \cdot \frac{18}{37} + (-1000)^2 \cdot \frac{19}{37} = 1000^2\\
\mathrm{D}^2\,\xi &= 1000^2 - \frac{1000^2}{37^2} = \frac{1368}{1369} \cdot 10^6.
\end{aligned}$$

8.2. feladat. Egy kockával dobva a dobott számnak határozzuk meg a várható értékét és a szórásnégyzetét!

Megoldás. Jelölje ξ a dobott számot. Ekkor

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\,\xi &= 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2}\\
\mathrm{E}\,\xi^2 &= 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{91}{6}\\
\mathrm{D}^2\,\xi &= \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}.
\end{aligned}$$

8.3. feladat. Két kockával dobva a dobott számok összegének határozzuk meg a várható értékét és a szórásnégyzetét!

Megoldás. Jelölje ξ az összeget. A 7.2. feladat megoldása alapján

$$\mathrm{E}\,\xi = (2+12)\frac{1}{36} + (3+11)\frac{2}{36} + (4+10)\frac{3}{36} + (5+9)\frac{4}{36} + (6+8)\frac{5}{36} + 7 \cdot \frac{6}{36} = 7$$

és

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\,\xi^2 = (2^2+12^2)\frac{1}{36} + (3^2+11^2)\frac{2}{36} + (4^2+10^2)\frac{3}{36}+\\
+ (5^2+9^2)\frac{4}{36} + (6^2+8^2)\frac{5}{36} + 7^2 \cdot \frac{6}{36} = \frac{1974}{36},
\end{aligned}$$

így

$$\mathrm{D}^2\,\xi = \frac{1974}{36} - 7^2 = \frac{35}{6}.$$

A 8.2. feladat alapján is megoldható, felhasználva a várható érték és a szórásnégyzet tulajdonságait. Jelölje ξ_1 az első, ξ_2 pedig a második kocka eredményét. Ekkor

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\,\xi &= \mathrm{E}(\xi_1+\xi_2) = \mathrm{E}\,\xi_1 + \mathrm{E}\,\xi_2 = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = 7\\
\mathrm{D}^2\,\xi &= \mathrm{D}^2(\xi_1+\xi_2) = \mathrm{D}^2\,\xi_1 + \mathrm{D}^2\,\xi_2 = \frac{35}{12} + \frac{35}{12} = \frac{35}{6}.
\end{aligned}$$

9. fejezet

Binomiális eloszlás

Definíció

Legyen ξ diszkrét valószínűségi változó, $n \in \mathbb{N}$, $R_\xi := \{0, 1, \ldots, n\}$ és $0 < p < 1$. Ha minden $k \in R_\xi$ esetén

$$\mathrm{P}(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

akkor ξ-t n-ed rendű p paraméterű *binomiális eloszlású* valószínűségi változónak nevezzük.

Egy p valószínűségű esemény n kísérletben történő bekövetkezéseinek a száma, azaz a gyakorisága n-edrendű p paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó. Például legyen egy urnában 3 darab golyó, egy piros és két fehér. Vegyünk ki az urnából véletlenszerűen egy golyót, majd tegyük vissza. Ezt ismételjük meg tízszer. Legyen ξ azon esetek száma, amikor pirosat vettünk ki. Ekkor ξ gyakoriságot jelöl, így ez 10-ed rendű $\frac{1}{3}$ paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó. Tehát például annak a valószínűsége, hogy a 10 esetből pontosan kétszer választottunk piros golyót

$$\mathrm{P}(\xi = 2) = \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^8.$$

Tétel

Ha ξ egy n-ed rendű p paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó, akkor $\mathrm{E}\,\xi = np$ és $\mathrm{D}^2\,\xi = np(1-p)$.

Feladatok

9.1. feladat. Az ötöslottóban mi a valószínűsége, hogy a joker számban nincs 0? (A joker szám hatjegyű, melyben minden számjegy 0-tól 9-ig egyforma valószínűséggel bármi lehet.)

Megoldás. Legyen ξ a kisorsolt nullák száma. Ekkor ξ binomiális eloszlású $n = 6$ renddel és $p = 0{,}1$ paraméterrel. Így

$$\mathrm{P}(\xi = 0) = \binom{6}{0} 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^6 = 0{,}9^6.$$

9.2. feladat. Ezer újszülött között átlagban 516 fiú. Mi a valószínűsége, hogy egy 6 gyermekes családban a fiúk száma legalább annyi, mint a lányoké?

Megoldás. Legyen ξ a fiúk száma egy 6 gyermekes családban. Ekkor ξ binomiális eloszlású $n = 6$ renddel és $p = 0{,}516$ paraméterrel. Így

$$\mathrm{P}(\xi \geq 3) = \sum_{k=3}^{6} \binom{6}{k} 0{,}516^k \cdot 0{,}484^{6-k}.$$

9.3. feladat. Rezső nem tanult semmit a vizsgára, ahol 10 eldöntendő kérdésre kell válaszolnia. Az anyagból valami kicsit dereng, ezért 0,6 valószínűséggel ír jó választ egy-egy kérdésre. Mekkora valószínűséggel megy át Rezső a vizsgán, ha ehhez minimum 8 jó válasz kell?

Megoldás. Legyen ξ a jó válaszok száma. Ekkor ξ binomiális eloszlású $n = 10$ renddel és $p = 0{,}6$ paraméterrel. Így

$$\mathrm{P}(\xi \geq 8) = \sum_{k=8}^{10} \binom{10}{k} 0{,}6^k \cdot 0{,}4^{10-k} \approx 0{,}1673.$$

9.4. feladat. Egy gép által gyártott termékek között naponta átlagosan 12 darab lesz selejtes, szórása $\sqrt{11{,}88}$. Hány terméket készít a gép naponta?

Megoldás. Legyen ξ a selejtesek száma n darab termékből. Ekkor ξ n-edrendű p paraméterű binomiális eloszlású, ahol p annak a valószínűsége, hogy selejtes egy termék. Így

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{E}\,\xi &= np = 12 \\ \mathrm{D}^2\,\xi &= np(1-p) = 11{,}88 \end{aligned}\right\}$$

melyből $p = 0{,}01$ és $n = 1200$.

9.5. feladat. Annak a valószínűsége, hogy egy üzemben a nyersanyagellátás valamely napon zavartalan, 0,75. Mekkora a valószínűsége, hogy 6 napon keresztül csak 3 napon át lesz a nyersanyagellátás zavartalan? Mennyi lesz 6 nap alatt a zavartalan ellátású napok számának várható értéke?

Megoldás. Legyen 6 napból ξ a zavartalan napok száma. Ez $n = 6$ rendű és $p = 0{,}75$ paraméterű binomiális eloszlású, így $\mathrm{P}(\xi = 3) = \binom{6}{3} 0{,}75^3 \cdot 0{,}25^3$ és $\mathrm{E}\,\xi = np = 6 \cdot 0{,}75$.

10. fejezet

Poisson-eloszlás

Definíció

Legyen ξ diszkrét valószínűségi változó és $R_\xi := \{0, 1, 2, \ldots\}$. Ha minden $k \in R_\xi$ esetén

$$\mathrm{P}(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

ahol $\lambda > 0$, akkor ξ-t λ paraméterű *Poisson-eloszlású* valószínűségi változónak nevezzük.

Tétel

Legyen ξ egy $\lambda > 0$ paraméterű Poisson-eloszlású valószínűségi változó. Ekkor $\mathrm{E}\,\xi = \mathrm{D}^2\,\xi = \lambda$.

Egy adott esemény bekövetkezéseinek a száma Poisson-eloszlású adott időszakaszban vagy térrészben, ha az csak az időszakasz hosszától vagy a térrész nagyságától függ.

Feladatok

10.1. feladat. Egy postahivatalban az egy év alatt feladott címezetlen levelek száma 1017. Mi a valószínűsége, hogy egy nap kettőnél több címezetlen levelet adnak fel?

Megoldás. Legyen ξ az egy nap alatt feladott címezetlen levelek száma. Ekkor ξ Poisson-eloszlású $\mathrm{E}\,\xi = \lambda = \frac{1017}{365}$ paraméterrel. Így

$$\mathrm{P}(\xi > 2) = 1 - \mathrm{P}(\xi \leq 2) = 1 - \sum_{k=0}^{2} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = 1 - e^{-\lambda}(1 + \lambda + 0{,}5\lambda^2) \approx 0{,}5273.$$

10.2. feladat. Egy adott éjszakán 10 percenként észlelhető csillaghullás. Mi a valószínűsége, hogy negyed óra alatt két csillaghullást látunk, ha feltételezzük, hogy a csillaghullások száma Poisson-eloszlású?

Megoldás. Legyen ξ az észlelt csillaghullások száma negyed óra alatt. Ekkor ξ Poisson-eloszlású $\mathrm{E}\,\xi = \lambda = \frac{15}{10} = 1{,}5$ paraméterrel. Így

$$\mathrm{P}(\xi = 2) = \frac{1{,}5^2}{2!} e^{-1{,}5} \approx 0{,}2510.$$

10.3. feladat. Egy 500 oldalas könyvben 200 sajtóhiba van. Mi a valószínűsége, hogy 10 véletlenszerűen kiválasztott oldalon nincs sajtóhiba?

Megoldás. Legyen ξ a sajtóhibák száma a kiválasztott 10 oldalon. Ekkor ξ Poisson-eloszlású $\mathrm{E}\,\xi = \lambda = \frac{200}{500} \cdot 10 = 4$ paraméterrel. Így

$$\mathrm{P}(\xi = 0) = \frac{4^0}{0!} e^{-4} \approx 0{,}0183.$$

10.4. feladat. Egy félkilós kalácsban átlagban 80 mazsolaszem található. Mi a valószínűsége annak, hogy egy 5 dekagrammos szeletben nincs mazsola?

Megoldás. Egy szeletben a mazsolaszemek száma (jelöljük ξ-vel) Poisson-eloszlásúnak tekinthető. Egy szeletben az átlagos számuk 8, tehát $\lambda = 8$. Így $\mathrm{P}(\xi = 0) = \frac{8^0}{0!} e^{-8} = e^{-8}$.

10.5. feladat. Egy lemezből 25 darab egyenlő nagyságú idomot vágnak ki. Egy lemezen a hibák száma Poisson-eloszlású 3,5 várható értékkel. Hány lemezt kell beszerezni, ha félmillió hibátlan idomot kell előállítani?

Megoldás. Legyen ξ a hibák száma egy idomon. Ekkor ξ Poisson-eloszlású $\mathrm{E}\,\xi = \lambda = \frac{3{,}5}{25} = 0{,}14$ paraméterrel. Így

$$\mathrm{P}(\xi = 0) = \frac{0{,}14^0}{0!} e^{-0{,}14} = e^{-0{,}14}.$$

Emiatt $\frac{500000}{e^{-0{,}14}} = 500000e^{0{,}14}$ darab idomból lesz félmillió hibátlan, azaz $\frac{500000e^{0{,}14}}{25} = 20000e^{0{,}14} \approx 23006$ darab lemezt kell feldolgozni.

11. fejezet

Exponenciális eloszlás

Vizsgáljuk egy üvegpohár élettartamát! Mivel az üveg nem öregszik, ezért csak a véletlen törések határozzák meg az élettartamot. Vagyis ha x ideig nem törik el a pohár, akkor további legalább y ideig ugyanakkora valószínűséggel marad ép, mintha akkor gyártották volna, azaz

$$\mathrm{P}(\xi \geq x + y \mid \xi \geq x) = \mathrm{P}(\xi \geq y) \quad \text{minden } x, y > 0 \text{ esetén,}$$

ahol ξ az élettartam. Ezt a tulajdonságot *örökifjú tulajdonságnak* nevezzük.

Definíció

Legyen ξ egy valószínűségi változó és $\lambda > 0$. Ha ξ eloszlásfüggvénye

$$F_\xi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0, \end{cases}$$

akkor ξ-t λ paraméterű *exponenciális eloszlású* valószínűségi változónak nevezzük.

Ha ξ exponenciális eloszlású valószínűségi változó, akkor rendelkezik az örökifjú tulajdonsággal.

Tétel

Ha ξ egy λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó, akkor $\mathrm{E}\,\xi = \frac{1}{\lambda}$ és $\mathrm{D}^2\,\xi = \frac{1}{\lambda^2}$.

Feladatok

11.1. feladat. Egy szövőgépen a fonal szakadásáig eltelt idő exponenciális eloszlású, átlagban 2,5 óra. Mi a valószínűsége, hogy 8 óra alatt nem szakad el a fonal?

Megoldás. Legyen ξ a fonal szakadásáig eltelt idő órában mérve. Ekkor $\mathrm{E}\,\xi = \frac{1}{\lambda} = 2{,}5$, azaz $\lambda = 0{,}4$. Így $\mathrm{P}(\xi \geq 8) = 1 - F_\xi(8) = e^{-0{,}4 \cdot 8} = e^{-3{,}2}$.

11.2. feladat. Egy boltban a vevők egymásutáni érkezésének időbeli eloszlása exponenciális, átlagban 1 perc. Mi a valószínűsége, hogy egy vevő érkezése után 5 percig nem jön újabb vevő?

Megoldás. Legyen ξ két vevő érkezése között eltelt idő percben mérve. Ekkor $\mathrm{E}\,\xi = \frac{1}{\lambda} = 1$, azaz $\lambda = 1$. Így $\mathrm{P}(\xi \geq 5) = 1 - F_\xi(5) = e^{-5}$.

11.3. feladat. Egy boltban átlagosan 6 percet kell sorban állni. Mi a valószínűsége, hogy 4 percen belül sorra kerülünk, ha a várakozási idő exponenciális eloszlású?

Megoldás. Legyen ξ a sorban állási idő percben mérve. Ekkor $\mathrm{E}\,\xi = \frac{1}{\lambda} = 6$, azaz $\lambda = \frac{1}{6}$. Így $\mathrm{P}(\xi < 4) = F_\xi(4) = 1 - e^{-\frac{1}{6}\cdot 4}$.

11.4. feladat. Annak a valószínűsége, hogy egy benzinkútnál 6 percnél többet kell várni 0,1. Mi a valószínűsége, hogy 3 percen belül sorra kerülünk, ha a várakozási idő exponenciális eloszlású?

Megoldás. Legyen ξ a várakozási idő percben mérve. Ekkor $0{,}1 = \mathrm{P}(\xi \geq 6) = 1 - F_\xi(6) = e^{-6\lambda}$, melyből $\lambda = -\frac{1}{6}\ln 0{,}1$. Így $\mathrm{P}(\xi < 3) = 1 - e^{-3\lambda} = 1 - \sqrt{0{,}1}$.

12. fejezet

Bernoulli-féle nagy számok törvénye

A valószínűség fogalmának meghatározásakor a matematikai modellünkben feltételeztük a Bernoulli-féle tapasztalat alapján, hogy a valószínűség örökli a relatív gyakoriság legfontosabb tulajdonságait: az értéke nemnegatív, a biztos esemény valószínűsége 1 és σ-additív. Felmerül a kérdés, hogy elég-e csak ennyit feltételezni a valószínűségről? Azaz ez alapján megmutatható-e a modellünkben Bernoulli tapasztalata, miszerint egy esemény relatív gyakorisága a kísérletek számának növelésével egyre kisebb mértékben ingadozik az esemény valószínűsége körül? A modell akkor lesz jó, ha ez az eddigiek alapján bizonyítható tétel.

Tétel Bernoulli-féle nagy számok törvénye

Legyen egy esemény valószínűsége p és ϱ_n a gyakorisága n kísérlet után. Ekkor minden $\varepsilon > 0$ esetén

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{\varrho_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$

Ebből látható, hogy n növelésével egyre kisebb annak a valószínűsége (határértékben 0), hogy az esemény $\frac{\varrho_n}{n}$ relatív gyakorisága ε-nál jobban eltérjen a valószínűségtől. Vagyis a modellünkben a valószínűség és a relatív gyakoriság hasonló kapcsolatban van, mint amit a tapasztalat mutat.

A Bernoulli-féle nagy számok törvényében akkor is tudunk felső becslést adni, ha p értéke nem ismert. Ugyanis $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ mindig teljesül, így

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{\varrho_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

A feladatokban gyakran használható a következő becslés is:

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{\varrho_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

Feladatok

12.1. feladat. Valamely társadalmi rétegben meg akarjuk határozni a szeszfogyasztók arányát. Hány megfigyelést kell végezni ahhoz, hogy a megfigyelésekből adódó arány a valódi aránytól minimum 0,95 valószínűséggel legfeljebb csak 0,01-dal térjen el?

Megoldás. Jelölje n a megfigyelések számát, ϱ_n a megfigyelt személyek között a szeszfogyasztók számát, p pedig a valódi arányt. Ekkor a Bernoulli-féle nagy számok törvénye alapján

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{\varrho_n}{n} - p\right| \leq 0{,}01\right) \geq \mathrm{P}\left(\left|\frac{\varrho_n}{n} - p\right| < 0{,}01\right) \geq 1 - \frac{1}{4n \cdot 0{,}01^2}.$$

Így a feltétel teljesül, ha

$$0{,}95 \leq 1 - \frac{1}{4n \cdot 0{,}01^2},$$

azaz $n \geq 50\,000$.

12.2. feladat. Hány dobást kell végeznünk egy szabályos kockával, hogy a 6-os dobás valószínűségét a 6-os relatív gyakorisága legalább 0,9 valószínűséggel 0,01-nál kisebb hibával megközelítse? Oldjuk meg a feladatot akkor is, ha a kockáról nem tudjuk biztosan, hogy szabályos-e, azaz a 6-os dobásának a valószínűségét nem ismerjük!

Megoldás. Jelölje ϱ_n a 6-os dobásának gyakoriságát n dobás után. A Bernoulli-féle nagy számok törvénye alapján

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{\varrho_n}{n} - \frac{1}{6}\right| < 0{,}01\right) \geq 1 - \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}{n \cdot 0{,}01^2} \geq 0{,}9.$$

Ebből $n \geq 13\,889$. Ha a kockáról nem tudjuk biztosan, hogy szabályos-e, akkor

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{\varrho_n}{n} - p\right| < 0{,}01\right) \geq 1 - \frac{1}{4n \cdot 0{,}01^2} \geq 0{,}9,$$

ahol p a 6-os dobásának a valószínűsége. Ebből $n \geq 25\,000$.

12.3. feladat. Egy célpontra 200 lövést adnak le. A találat valószínűsége minden lövésnél 0,4. Milyen határok közé fog esni legalább 0,9 valószínűséggel a találatok száma?

Megoldás. Legyen $n = 200$ a lövések száma, ϱ_n a találatok száma és $p = 0{,}4$. Ekkor a nagy számok Bernoulli-féle törvénye alapján

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{\varrho_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} = 0{,}9.$$

Ebből $\varepsilon \approx 0{,}1095$. Így

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{\varrho_n}{200} - 0{,}04\right| < 0{,}1095\right) = \mathrm{P}(59 \leq \varrho_n \leq 101) \geq 0{,}9.$$

Tehát a találatok száma 59 és 101 között lesz legalább 0,9 valószínűséggel.

12.4. feladat. A tapasztalatok szerint egy üzemben a termékek 95 %-a hibátlan. Az üzemnek meghatározott idő alatt százezer darab terméket kell készíteni. Legalább mennyi a valószínűsége, hogy a legyártott termékek közül 93 000 és 97 500 közé esik a hibátlan termékek száma?

Megoldás. Legyen $n = 100\,000$ a termékek száma, ϱ_n abból a hibátlan termékek száma és $p = 0{,}95$. Ekkor a nagy számok Bernoulli-féle törvénye alapján

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(93\,000 \le \varrho_n \le 97\,500) = \\
&= \mathrm{P}\Big(0{,}93 \le \frac{\varrho_n}{n} \le 0{,}975\Big) = \mathrm{P}\Big(-0{,}02 \le \frac{\varrho_n}{n} - p \le 0{,}025\Big) \ge \\
&\ge \mathrm{P}\Big(\Big|\frac{\varrho_n}{n} - p\Big| \le 0{,}02\Big) \ge \mathrm{P}\Big(\Big|\frac{\varrho_n}{n} - p\Big| < 0{,}02\Big) \ge 1 - \frac{p(1-p)}{0{,}02^2 n} \approx 0{,}9998.
\end{aligned}$$

12.5. feladat. Egy gyárból kikerülő gyártmányok 10 %-a hibás. Egy bizonyos számú gyártmányból álló tételt a minőségi ellenőrzés csak akkor találja elfogadhatónak, ha abban legfeljebb 12 % hibás. Mekkora legyen a tételben a gyártmányok darabszáma, ha azt akarjuk, hogy legalább 0,95 valószínűséggel elfogadhatónak minősítsék?

Megoldás. Jelölje n a gyártmányok darabszámát a tételben, ϱ_n pedig a tételben található hibás darabok számát. A kérdés, milyen n esetén teljesül, hogy

$$\mathrm{P}\Big(\frac{\varrho_n}{n} \le 0{,}12\Big) \ge 0{,}95? \tag{$*$}$$

A nagy számok Bernoulli-féle törvénye alapján

$$\begin{aligned}
1 - \frac{0{,}1(1-0{,}1)}{0{,}02^2 n} &\le \mathrm{P}\Big(\Big|\frac{\varrho_n}{n} - 0{,}1\Big| < 0{,}02\Big) = \mathrm{P}\Big(0{,}08 < \frac{\varrho_n}{n} < 0{,}12\Big) \le \\
&\le \mathrm{P}\Big(\frac{\varrho_n}{n} < 0{,}12\Big) \le \mathrm{P}\Big(\frac{\varrho_n}{n} \le 0{,}12\Big).
\end{aligned}$$

Így $(*)$ teljesül, ha

$$0{,}95 \le 1 - \frac{0{,}1(1-0{,}1)}{0{,}02^2 n},$$

amelyből kapjuk, hogy $n \ge 4500$.

13. fejezet

Matematikai statisztika

A valószínűségszámításban tárgyalt feladatokban mindig szerepel valamilyen információ bizonyos típusú véletlen események valószínűségére vonatkozóan. Például:

- *Mi a valószínűsége annak, hogy két szabályos kockával dobva a kapott számok összege 7?*
  Itt a szabályosság azt jelenti, hogy a kocka bármely oldalára $\frac{1}{6}$ valószínűséggel eshet.

- *Egy boltban az átlagos várakozási idő 2 perc. Mi a valószínűsége, hogy 3 percen belül nem kerülünk sorra, ha a várakozási idő exponenciális eloszlású?*
  Itt az adott információk alapján $1-e^{-\frac{x}{2}}$ annak a valószínűsége, hogy a várakozási idő kevesebb mint x perc.

Ha egy hasonló feladatban a megoldáshoz szükséges információk nem mindegyike ismert, akkor azokat nekünk kell tapasztalati úton meghatározni. A matematikai statisztika ilyen jellegű problémákkal foglalkozik. A statisztikai feladatokban tehát az események rendszere, pontosabban az Ω és $\mathcal{F}$ adottak, de a P valószínűség nem.

A statisztikai feladatok mindig megfogalmazhatók valószínűségi változók segítségével, így egy valószínűségi változóra vonatkozólag kell információkat gyűjteni. Jelöljük ezt ξ-vel. Az adatgyűjtésnek a statisztikában egyetlen módja van, a ξ-t meg kell figyelni (mérni) többször, egymástól függetlenül. Az i-edik megfigyelés eredményét jelölje ξ_i, amely egy véletlen érték, vagyis valószínűségi változó. A kapott $\xi_1, \ldots, \xi_n$ valószínűségi változókat a ξ-re vonatkozó *n elemű mintának* nevezzük.

A gyakorlatban nem mintával dolgozunk, hanem konkrét számokkal, melyek a mintaelemek lehetséges értékei.

Definíció

Ha $\xi_1, \ldots, \xi_n$ a ξ valószínűségi változóra vonatkozó minta és $\omega \in \Omega$, akkor a $\xi_1(\omega), \ldots, \xi_n(\omega)$ értékeket ξ-re vonatkozó *mintarealizációnak* nevezzük.

Statisztikai feladatokban mintarealizáció alapján számolunk. Az így meghozott döntés nem biztos, hogy megfelel a valóságnak, csak annyit mondhatunk róla, hogy nem mond ellent a mintarealizációnak.

A vizsgált ξ valószínűségi változó F_ξ eloszlásfüggvényét ismerve rengeteg kérdés megválaszolható. Így a statisztikában alapvető feladat az eloszlásfüggvény becslése. Ehhez azt kell tudni, hogy $F_\xi(x) = \mathrm{P}(\xi < x)$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Tehát egy esemény valószínűségét kell megbecsülni. A valószínűség definícióját a relatív gyakoriság tulajdonságai sugallták, így egy esemény valószínűségét a relatív gyakoriságával érdemes becsülni. A $\xi < x$ esemény relatív gyakorisága a ξ-re vonatkozó minta alapján az x-nél kisebb mintaelemek és a összes mintaelemek számának hányadosa.

Definíció

Legyen $\xi_1, \ldots, \xi_n$ egy ξ valószínűségi változóra vonatkozó minta. Ekkor azt a függvényt, amely minden x valós számhoz az

$$F_n^*(x) := \frac{x\text{-nél kisebb mintaelemek száma}}{n}$$

valószínűségi változót rendeli, a ξ-re vonatkozó n elemű mintához tartozó *tapasztalati eloszlásfüggvényének* nevezzük.

A *matematikai statisztika alaptétele* szerint (amit most nem részletezünk) a tapasztalati eloszlásfüggvény nagyon jó becslése a valódi eloszlásfüggvénynek.

Tegyük fel, hogy egy ismeretlen eloszlású ξ valószínűségi változó várható értékét kell meghatározni. Mivel az eloszlást nem ismerjük, ezért a minta alapján kell becslést adni. A későbbiekben látni fogjuk, hogy bizonyos szempontból jó becslése a várható értéknek a ξ-re vonatkozó $\xi_1, \ldots, \xi_n$ minta elemeinek a számtani közepe, azaz $\frac{1}{n}(\xi_1 + {} + \cdots + \xi_n)$. Általánosan fogalmazva itt egy olyan függvényt definiáltunk, amely a mintához egy valószínűségi változót rendel.

Definíció

Az olyan függvényeket, melyek a mintához egy valószínűségi változót rendelnek, *statisztikának* nevezzük.

Definíció

Legyen $\xi_1, \ldots, \xi_n$ a ξ valószínűségi változóra vonatkozó minta. Ekkor

(1) a *mintaátlag* $\overline{\xi} := \frac{1}{n}(\xi_1 + \cdots + \xi_n)$;

(2) a *tapasztalati szórásnégyzet* $S_n^2 := \frac{1}{n}(\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2) - \overline{\xi}^2$;

(3) a *korrigált tapasztalati szórásnégyzet* $S_n^{*2} := \frac{n}{n-1} S_n^2$.

Tegyük fel, hogy a vizsgált valószínűségi változó eloszlásának típusa már ismert (binomiális, exponenciális, stb.), de az eloszlás valamely paramétere vagy paraméterei ismeretlenek. A pontbecslés feladata, hogy ezeknek az ismeretlen paramétereknek egy valós értékű függvényét becsüljük meg egy statisztikával. Például, ha ξ exponenciális eloszlású λ paraméterrel, ahol λ ismeretlen, akkor becsüljük meg egy statisztikával a ξ várható értékét. Itt a várható érték $\frac{1}{\lambda}$, azaz a paraméternek egy valós értékű függvénye.

Fontos kérdés, hogy milyen szempontok szerint válasszuk ki a becslést megadó statisztikát. A következő természetesnek tűnő feltételeket adjuk:

- ingadozzon a becsülendő érték körül;
- szórása a lehető legkisebb legyen;
- a minta elemszámának végtelenbe tartása esetén konvergáljon a becsülendő értékhez.

A következőkben ezeket a feltételeket fogalmazzuk meg pontosabban. Jelölje $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_v$ az ismeretlen paramétereket, legyen $\vartheta := (\vartheta_1, \ldots, \vartheta_v)$ és jelöljük $g(\vartheta)$-val a becsülendő értéket.

Definíció

A T statisztika $g(\vartheta)$ *torzítatlan becslése*, ha T várható értéke minden lehetséges ϑ esetén $g(\vartheta)$-val egyezik meg.

Például

- a mintaátlag torzítatlan becslése a várható értéknek;
- egy esemény relatív gyakorisága torzítatlan becslése az esemény valószínűségének;
- a korrigált tapasztalati szórásnégyzet torzítatlan becslése a szórásnégyzetnek.

Definíció

A $g(\vartheta)$ összes torzítatlan becslése közül a legkisebb szórásút a $g(\vartheta)$ *hatásos becslésének* nevezzük.

Például egy esemény relatív gyakorisága hatásos becslése az esemény valószínűségének.

Definíció

A T_n statisztikasorozat (ahol $n \in \mathbb{N}$ a minta elemszámát jelenti) $g(\vartheta)$-nak *erősen konzisztens becsléssorozata*, ha minden lehetséges ϑ esetén $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = g(\vartheta)$ teljesül 1 valószínűséggel.

Például

- a mintaátlag erősen konzisztens becsléssorozata a várható értéknek;
- egy esemény relatív gyakorisága erősen konzisztens becsléssorozata az esemény valószínűségének;
- a tapasztalati szórásnégyzet erősen konzisztens becsléssorozata a szórásnégyzetnek.

Feladatok

13.1. feladat. Dobjon fel egy dobókockát tízszer. Adja meg és rajzolja fel kapott mintarealizációhoz tartozó tapasztalati eloszlásfüggvényt! Feltételezve, hogy ez egy szabályos dobókocka volt, adja meg a valódi eloszlásfüggvényt is és hasonlítsa össze a tapasztalatival!

Megoldás. Például, ha a dobott számok 3, 4, 5, 3, 6, 2, 3, 3, 5, 2, akkor

$$F_{10}^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \le 2, \\ 0{,}2 & \text{ha } 2 < x \le 3, \\ 0{,}6 & \text{ha } 3 < x \le 4, \\ 0{,}7 & \text{ha } 4 < x \le 5, \\ 0{,}9 & \text{ha } 5 < x \le 6, \\ 1 & \text{ha } x > 6. \end{cases}$$

A megoldást nem részletezzük, csak egy esetet említünk: Ha $3 < x \le 4$, akkor a mintában 6 darab olyan elem van, amely x-nél kisebb, így $F_{10}^*(x)$ értéke 6 osztva a mintaelemek számával, azaz 0,6. Feltételezve a dobókocka szabályosságát

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 1, \\ \frac{1}{6}, & \text{ha } 1 < x \le 2, \\ \frac{2}{6}, & \text{ha } 2 < x \le 3, \\ \frac{3}{6}, & \text{ha } 3 < x \le 4, \\ \frac{4}{6}, & \text{ha } 4 < x \le 5, \\ \frac{5}{6}, & \text{ha } 5 < x \le 6, \\ 1 & \text{ha } x > 6. \end{cases}$$

A rajzokat az Olvasóra bízzuk!

13.2. feladat. Az előző minta esetén számolja ki a mintaátlagot, tapasztalati szórásnégyzetet és a korrigált tapasztalati szórásnégyzetet!

Megoldás. Például, ha a dobott számok 3, 4, 5, 3, 6, 2, 3, 3, 5, 2 voltak, akkor

$$\begin{aligned} \overline{\xi} &= \frac{1}{10}(3+4+5+3+6+2+3+3+5+2) = 3{,}6 \\ S_n^2 &= \frac{1}{10}(3^2+4^2+5^2+3^2+6^2+2^2+3^2+3^2+5^2+2^2) - \overline{\xi}^2 = 14{,}6 - 3{,}6^2 = 1{,}64 \\ S_n^{*2} &= \frac{n}{n-1} S_n^2 = \frac{10}{9} \cdot 1{,}64 \approx 1{,}82. \end{aligned}$$