

„A jó matematikus nem halmozza az élvezeteket,
hanem élvezi a halmazokat.”

Halmazelmélet. Fiatal tudományág, létrejött a XIX. század második felére tehető, ami nem véletlen, hiszen a halmazok vizsgálatához nagyfokú absztrakció szükséges. Ekkorra érték el a matematikai kutatások olyan szintet, hogy az ilyen absztrakció szükségessé és lehetővé vált. Az előzmények közül a következő három a legfontosabb.

1. A matematikusok figyelme a halmazok elemeiről a halmazokra irányult. Olyan problémák vezettek ide, melyeket bizonyos halmazokra anélkül sikerült megoldani, hogy azokat az egyes halmazelemekre vonatkoztatták volna (pl. biztosítási matematika, kinetikus gázelmélet).
2. A kritikai szellem fejlődése, ami azt jelentette, hogy részletesen elemezték a korábban magától értetődőnek és ezért általános érvényűnek tekintett megállapításokat. (Ennek nagy szerepe volt a matematikai logika fejlődésében is.)
3. A legdöntőbb momentum az volt, amikor a végtelen sorok vizsgálata közben felismerték, hogy a véges halmazok tulajdonságaival nem rendelkeznek törvénytzerűen a *végtelen halmazok* is.

A ma *naiiv halmazelméletnek* nevezett rendszer megalkotója GEORG CANTOR (1845–1918) volt, akitől a halmaz fogalmának az alábbi körülírása származik: „A halmaz meghatározott, különböző, képzeletünkben vagy gondolatunkban fölfogott dolgok összessége. A kérdéses dolgok a halmaz elemei.”

A továbbiakban az alapvető halmazelméleti fogalmakat – részhalmaz, halmazok egyenlősége, műveletek, számosság stb. – ismertnek tételezzük fel, hiszen az analízis tárgyalásakor ezeket az olvasó megismerte.

CANTOR vizsgálta először a halmazelmélet egyik alapvető problémáját, az ún. *kontinuumhipotézist*, amely szerint nem létezik olyan halmaz, amelynek számossága a megszámlálhatóan végtelen halmazok számosságánál nagyobb, de a kontinuumszámosságnál kisebb.

A végtelen halmazok elméletének kezdettől fogva voltak bírálói, de addig szilárd elmélet volt, míg logikai ellentmondásokat nem fedeztek fel benne. Egyike ezeknek a Russell-féle antinómia, melynek népszerű változata a következő: *A falu borbélyja az a férfi a faluban, aki azokat és csak azokat a férfiakat borotválja meg a faluban, akik nem maguk borotválkoznak. Kérdés, hogy borotválkozik-e a borbély?*