Legyen $X$ egy halmaz. Az $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ halmazrendszert *$\sigma$-algebrának* nevezzük, ha

1. $X \in \mathcal{A}$,
2. $\overline{A} = X \setminus A \in \mathcal{A} \quad \forall A \in \mathcal{A}$,
3. $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$, ha $A_i \in \mathcal{A}$ $(i \in \mathbb{N})$.

Ekkor az $(X, \mathcal{A})$ rendezett párt *mérhető térnek*, az $\mathcal{A}$ elemeit *mérhető halmazoknak* nevezzük. A $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ függvényt *mértéknek* nevezzük az $(X, \mathcal{A})$ mérhető téren, ha $\mu(\emptyset) = 0$ és

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

minden $A_i \in \mathcal{A}$ $(i \in \mathbb{N})$ diszjunkt rendszerre. Ekkor $(X, \mathcal{A}, \mu)$-t *mértéktérnek*, $\mu(A)$-t az $A$ mértékének nevezzük.

Legyen $X$ egy halmaz, $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$, $\nu\colon \mathcal{H} \to [0, \infty]$ és $\mu$ a $\nu$-höz tartozó külső mérték. $B \subset X$ pontosan akkor $\mu$-mérhető, ha

$$\nu(A) \geq \mu(A \cap B) + \mu(A \setminus B) \quad \forall A \in \mathcal{H}. \tag{1}$$

Az (1) szükségessége triviálisan teljesül. Az elégséges voltát később látjuk be.

A véges értékkészletű függvényeket *egyszerű függvényeknek* nevezzük. Ha $X$ egy halmaz és $A \subset X$, akkor az

$$I_A\colon X \to \mathbb{R}, \quad I_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in A, \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

függvényt az $A$ *karakterisztikus függvényének* nevezzük.

**Lebesgue majorált konvergencia tétele.** Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér és $g, f, f_n\colon X \to \mathbb{R}_b$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ mérhető függvények. Ha $g$ integrálható, $|f_n| \leq g$ $\forall n \in \mathbb{N}$-re és $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu.$$