Stabil pontrendszerek

Tómács Tibor

2017. január 13.

Kivonat

Rögzítsünk egy-egy elektront a számegyenesen az $a, a_1, a_2, \dots, a_n, b$ pontokban, majd egyszerre engedjük el őket. Az a_i pontba helyezett elektron csak az $[a_i, b_i]$ intervallumban mozoghat. Az a_i pontba helyezett elektron pozícióját az egyensúlyi helyzet beállta után jelöljük p_i-vel. Ezek az úgynevezett stabil pontok. A cikk ezeknek a stabil pontoknak a meghatározásával foglalkozik.

1. Stabil pontrendszer egyértelműsége

Legyenek $a, b, a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ olyan valós számok, melyekre teljesül, hogy $a < a_1 < a_2 < \dots < a_n$, $b_1 < b_2 < \dots < b_n < b$ és $a_i < b_i$ ($i = 1, \dots, n$). Legyen

$$I := \big\{[a, b], [a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n]\big\}.$$

1. Definíció. Legyenek $p_1, p_2, \dots, p_n$ olyan valós számok, melyekre teljesül, hogy $p_1 < p_2 < \dots < p_n$ és

$$p_i = \begin{cases} \frac{1}{2}(p_{i-1} + p_{i+1}), & \text{ha} \quad a_i < \frac{1}{2}(p_{i-1} + p_{i+1}) < b_i, \\ a_i, & \text{ha} \quad \frac{1}{2}(p_{i-1} + p_{i+1}) \le a_i, \\ b_i, & \text{ha} \quad b_i \le \frac{1}{2}(p_{i-1} + p_{i+1}), \end{cases}$$

minden $i = 1, \dots, n$ esetén, ahol $p_0 := a$ és $p_{n+1} := b$. Ekkor a $\{p_1, \dots, p_n\}$ pontrendszert *stabilnak* nevezzük I-re nézve.

2. Tétel. *Legfeljebb egy pontrendszer stabil I-re nézve.*

Az $a, a_1, a_2, \dots, a_n, b$ pontokban rögzített elektronokat ne egyszerre engedjük el. Először csak az a_1 pontbelit. Ez beáll egy $p_1^{(1)}$ egyensúlyi helyzetbe, majd rögzítjük. Ezután ezt megismételjük az a_2-ben lévővel, ami beáll egy $p_2^{(1)}$ egyensúlyi helyzetbe, majd rögzítjük. Ezt folytatjuk egészen az a_n-beli pontig, ami beáll a $p_n^{(1)}$ egyensúlyi helyzetbe, majd rögzítjük. Ezután elölről folytatjuk a $p_1^{(1)}$-beli ponttal, ami beáll a $p_1^{(2)}$ egyensúlyi helyzetbe, majd rögzítjük. Az eljárást addig folytatjuk, amíg egyetlen pont sem vesz már fel új pozíciót. Az állítás az, hogy így ugyanabba a helyzetbe kerülnek az elektronok, mintha egyszerre engedtük volna el őket.

3. Tétel. *Legyen* $p_0^{(0)} := a$, $p_{n+1}^{(0)} := b$ *és* $p_i^{(0)} := a_i$ $(i = 1, \dots, n)$. *Tegyük fel, hogy* $p_i^{(r-1)}$ $(i = 0,1, \dots, n+1)$ *már definiált valamely pozitív egész* r *esetén. Ekkor legyen* $p_0^{(r)} := a$, $p_{n+1}^{(r)} := b$ *és*

$$p_i^{(r)} := \begin{cases} \frac{1}{2}\bigl(p_{i-1}^{(r)} + p_{i+1}^{(r-1)}\bigr), & \textit{ha} \quad a_i < \frac{1}{2}\bigl(p_{i-1}^{(r)} + p_{i+1}^{(r-1)}\bigr) < b_i, \\ a_i, & \textit{ha} \quad \frac{1}{2}\bigl(p_{i-1}^{(r)} + p_{i+1}^{(r-1)}\bigr) \le a_i, \\ b_i, & \textit{ha} \quad b_i \le \frac{1}{2}\bigl(p_{i-1}^{(r)} + p_{i+1}^{(r-1)}\bigr). \end{cases}$$

Ekkor $p_i^{(r)}$ *minden* $i \in \{1, \dots, n\}$ *esetén monoton növekvő konvergens sorozat, továbbá* $p_i := \lim_{r\to\infty} p_i^{(r)}$ $(i = 1, \dots, n)$ *jelöléssel a* $\{p_1, \dots, p_n\}$ *pontrendszer stabil* I*-re nézve.*

4. Következmény. *Pontosan egy stabil pontrendszer létezik* I*-re nézve, nevezetesen a 3. tételben definiált* $\{p_1, \dots, p_n\}$.