Példa a report dokumentumosztály használatára

Szerző neve

évszám

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Minden természet- és társadalomtudomány foglalkozik olyan jelenségekkel, melyekben egy bizonyos esemény szükségszerűen bekövetkezik, ha az általunk ismert és figyelembe vett körülmények fennállnak. Ezeket *meghatározott eseményeknek* nevezzük.

Bizonyos jelenségeknél az összes számításba jöhető körülmény figyelembe vétele lehetetlen, de legalábbis igen nehéz. Ennek oka lehet például, hogy a jelenség hátterében meghúzódó körülmények rendszere a tudomány mai állása szerint még nem teljesen feltárt, vagy nem tudjuk mérni őket, vagy számuk túl nagy és kapcsolatuk nagyon bonyolult. Ilyenkor előfordulhat, hogy a figyelembe vett körülmények összessége nem határozza meg egy esemény bekövetkezésének elegendő okát. Az ilyen eseményeket *véletlen eseményeknek* nevezzük. Például, amikor egy dobókockával játszunk, akkor nem tudjuk figyelembe venni az összes körülményt – hogy milyen helyzetből indult, mekkora impulzust kapott, a légellenállást, az asztallal való ütközést, a súrlódást stb. –, csak azt a tényt, hogy feldobtuk. Ez viszont nem határozza meg a dobás eredményét egyértelműen, így számunkra például a hatos dobása véletlen eseményt jelent.

Ha egy véletlen kimenetelű jelenség sokszor ismétlődhet, akkor *véletlen tömegjelenségről* beszélünk. Az ilyen típusú jelenségekről a véletlenszerűségük ellenére is áttekintést nyerhetünk. Vegyük példaként a radioaktív bomlást. Bár minden egyes atommag bomlása véletlennek tekinthető, mégis például egy urántömbben elhelyezkedő sok-sok milliárd atommag esetében már előre meg tudjuk mondani, hogy egy meghatározott időn belül hány százalékuk fog elbomlani. Ez a bomlás úgynevezett exponenciális törvénye, melyet a valószínűségszámítás segítségével írhatunk le. Ezt a törvényt a mérések éppúgy alátámasztják, mint bármilyen meghatározott természeti törvényt.

A valószínűségszámítás tárgya a véletlen tömegjelenségek vizsgálata, feladata pedig ezen jelenségek törvényszerűségeinek a feltárása.

Végezzünk el egy véletlen kimenetelű kísérletet sokszor egymás után. Figyeljük egy lehetséges esemény bekövetkezését. Ha a kísérlet n végrehajtása után k-szor fordult elő a figyelt esemény, akkor a $\frac{k}{n}$ számot az esemény *relatív gyakoriságának* nevezzük.

A tapasztalat azt mutatja, hogy sok kísérlet esetén a relatív gyakoriság, egy *eseménytől függő érték körül ingadozik.*

A továbbiakban ezt az értéket a vizsgált esemény *valószínűségének* fogjuk nevezni. Ezen tapasztalat alapján axiómákat lefektetve lehetőség nyílik egy matematikai elmélet kidolgozására. Természetesen egy axiómarendszer akkor jó, ha az elmélet visszaadja a tapasztalatot. Látni fogjuk a nagy számok törvényeivel foglalkozó fejezetben, hogy ez az elvárás teljesül.

1. fejezet

Valószínűségszámítás

1.1. Események matematikai modellezése

Mindenekelőtt szükségünk lesz olyan eszközökre, amelyek alkalmasak a véletlen események közötti kapcsolatok leírására. Ezt halmazok segítségével oldjuk meg. Az események halmazokkal való azonosítása a matematikában a következő példa alapján kézenfekvőnek tűnik: Amikor egy dobókockával játszunk, az egyes, kettes, hármas, négyes, ötös vagy a hatos oldal lehet felül. A nekik megfelelő halmazok legyenek a következők: $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$. Ezeket a továbbiakban *elemi eseményeknek* fogjuk nevezni. De más események is elképzelhetők. Például az, hogy páros számot dobok. Ennek feleltessük meg a következő halmazt: $\{2, 4, 6\}$. Ezt az eseményt *összetett eseménynek* fogjuk hívni, mert felbontható nem triviális módon több esemény uniójára: $\{2, 4, 6\} = \{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}$. Az is esemény, hogy egytől hatig valamilyen egész szám fog kijönni. Ezt *biztos eseménynek* nevezzük, melyet Ω-val jelölünk, és a halmaz megfelelője: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Azt az eseményt, amely a kockajáték szabályai szerint nem fordulhat elő, *lehetetlen eseménynek* fogjuk nevezni, és a halmaz megfelelője legyen az üres halmaz. Végül azt is eseménynek kell tekinteni, ha egy esemény nem következik be. Például nem egyest dobok. Az ehhez tartozó halmaz: $\overline{\{1\}} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Vegyük észre, hogy akármelyik eseményt is tekintjük, az a biztos esemény egy részhalmaza. Milyen fontos tulajdonságai vannak az eseményeknek? Mindenekelőtt kihangsúlyozzuk, hogy értelemszerűen minden ami teljesül a halmazokra, az teljesül az eseményekre is. Az események rendszerét az Ω részhalmazainak egy rendszerével reprezentáljuk (jelöljük ezt $\mathcal{F}$-fel). Az előző példában $\mathcal{F}$ az Ω összes részhalmazainak a halmaza, azaz Ω *hatványhalmaza*. Ennek azonban nem feltétlenül kell teljesülni, mint azt látni fogjuk például a geometriai valószínűségi mező tárgyalásánál. Általános esetben $\mathcal{F}$ az Ω hatványhalmazának egy részhalmaza. Ennek a tulajdonságait kell megvizsgálni. Hármat emelünk ki:

1. Az első, hogy az Ω esemény, azaz eleme $\mathcal{F}$-nek.
2. Azt is láttuk, hogy egy esemény ellentettje is esemény.
3. Végül nyilvánvaló tulajdonság még, hogy két esemény uniója is esemény. Például páros számot vagy hármast dobok: $\{2, 4, 6\} \cup \{3\} = \{2, 3, 4, 6\}$. Az általánosabb esetek leírására szolgál az úgynevezett *Kolmogorov-féle elmélet*, mely felteszi, hogy nemcsak véges sok, hanem megszámlálhatóan végtelen sok esemény uniója is esemény.

A továbbiakban ezen tulajdonságokat választjuk az események axiómarendszereként.

1.2. A valószínűség matematikai modellezése

Egy másik alapfogalomra, a valószínűségre is szükségünk van. Tapasztalatunk alapján, ez nagyszámú kísérletek után, körülbelül a relatív gyakorisággal egyezik meg. Így a valószínűség jól jellemezhető a relatív gyakoriság tulajdonságaival. A valószínűség egy függvény. Minden eseményhez hozzárendeli azt a számot, amely körül a relatív gyakoriság ingadozik. Három tulajdonságát emeljük ki:

1. A relatív gyakoriság, s így a valószínűség értéke sem lehet negatív.
2. Ha a biztos esemény relatív gyakoriságát vizsgáljuk, akkor minden kísérlet esetén a bekövetkezések száma és a kísérletek száma megegyezik. Így a hányadosuk minden esetben 1. Ebből az következik, hogy a biztos esemény valószínűsége 1.
3. A harmadik tulajdonságot ismét dobókockával szemléltetjük. Tekintsük azokat az eseményeket, amikor az egyes oldal, illetve amikor a kettes vagy hármas oldal van felül. Az ezeknek megfelelő halmazok az $\{1\}$ és a $\{2, 3\}$. Ezen két egymást kizáró esemény relatív gyakoriságait megvizsgálva, azt fogjuk tapasztalni, hogy $\frac{1}{6}$ illetve $\frac{1}{3}$ körül ingadozik nagyszámú kísérlet esetén. Ez természetes, hiszen az oldalak között fizikai jellemzőit tekintve nincs különbség, csupán másképpen jelöljük őket. Így minden oldalra egyforma eséllyel eshet. Ha most az $\{1, 2, 3\}$ esemény relatív gyakoriságát vizsgáljuk, akkor az $\frac{1}{2}$ körül ingadozik. Vagyis ahogy az előre sejthető volt, az előző két érték összeadódik. Ezt az eredményünket általánosítva azt mondhatjuk, hogy ha az A és B események diszjunktak, akkor az események uniójának a valószínűsége megegyezik az események valószínűségeinek összegével. Itt is kiterjesztjük az eredményt végtelen

esetre. Eszerint megszámlálhatóan végtelen sok, páronként diszjunkt esemény uniójának valószínűsége megegyezik az események valószínűségeinek összegével. Bár ez nem következik a szemléletből, mégis elfogadásával a jelenségek egy igen széles köre leírható lesz.

A valószínűségszámítás Kolmogorov-féle elméletében ezeket a tulajdonságokat választjuk a valószínűség axiómarendszerének. (Lásd még [3, 27. oldal], illetve [7]. Ajánlott feladatgyűjtemények: [2, 9].)

Irodalomjegyzék

[1] Daróczy Zoltán: *Mérték és integrál*, Budapest, 1984, Tankönyvkiadó.

[2] Denkinger Géza: *Valószínűségszámítási gyakorlatok*, Budapest, 1986, Tankönyvkiadó.

[3] Fazekas István: *Valószínűségszámítás*, Debrecen, 2000, Debreceni Egyetem Kossuth Egyetemi Kiadója.

[4] P. R. Halmos: *Mértékelmélet*, Budapest, 1984, Gondolat.

[5] A. N. Kolmogorov, Sz. V. Fomin: *A függvényelmélet és a funkcionálanalízis elemei*, Budapest, 1981, Műszaki Könyvkiadó.

[6] Mogyoródi József, Somogyi Árpád: *Valószínűségszámítás I.*, Budapest, 1982, Tankönyvkiadó.

[7] Rényi Alfréd: *Valószínűségszámítás*, Budapest, 1966, Tankönyvkiadó.

[8] Sain Márton: *Nincs királyi út!* Budapest, 1975, Gondolat.

[9] Solt György: *Valószínűségszámítás*, Budapest, 1993, Műszaki Könyvkiadó.

[10] Szőkefalvi-Nagy Béla: *Valós függvények és függvénysorok*, Budapest, 1954, Tankönyvkiadó.